Der Grad einer analytischen Funktion über ihren partiellen Ableitungen

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Peter Kuhn

aus Altena

Bochum 1980

1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544708_0019

Der Grad einer analytischen Funktion über ihren partiellen Ableitungen

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Peter Kuhn

aus Altena

Bochum 1980

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht im WS 1980/81

Tag der mündlichen Prüfung : 16.1.1981

Dekan : Prof.Dr. Eduard Zehnder

Referent : Prof.Dr. Günther Scheja

Koreferent : Prof.Dr. Erwin Böger

Inhalt

Einleitung	1
§1 Analytische k-Algebren	4
§2 Differentialmoduln	8
§3 Analytische Tensorprodukte	12
§4 Isolierte Hyperflächen-singularitäten	18
§5 Kurven	22
§6 Berechnung der Milnor-Zahl	33
§7 Die Ganzheitsgleichung von f über $k\langle\langle f_{x_1},\ldots,f_{x_n}\rangle\rangle$	40
§8 Diagonalisierbare Derivationen	50
§9 Quasihomogene isolierte Singularitäten	57
Literatur	68

Einleitung

Ist k ein bewerteter Körper der Charakteristik 0 und $P = k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$ die lokale k-Algebra der konvergenten Potenzreihen in $x_1,\ldots,x_n$ mit Koeffizienten aus k, so versteht man unter einer "isolierten Singularität" in P eine Potenzreihe $f \in m(P)^2$, deren partielle Ableitungen f_{x_i} ein m(P)-primäres Ideal $\mathfrak{J}$ erzeugen. Die von den f_{x_i} erzeugte reguläre k-Algebra $S = k\langle\langle f_{x_1},\ldots,f_{x_n}\rangle\rangle$ ist ein Unterring von P, über dem P ein endlicher freier Modul ist. Der Rang $\mu(f)$ des S-Moduls P heißt die "Milnor-Zahl" von f und stimmt mit der k-Vektorraum-Kodimension von $\mathfrak{J}$ in P überein.

In Arbeiten von Scheja/Storch (15) und Böger (3) ist bewiesen worden, daß die Funktion f eine Ganzheitsgleichung über dem Ideal $\mathfrak{J}$ erfüllt, d.h. daß es ein r und $s_i \in \mathfrak{J}^i$ gibt mit

$$f^r + s_1 f^{r-1} + \ldots + s_r = 0 \quad .$$

Scheja zeigt in (14), daß die (eindeutig bestimmte) minimale Ganzheitsgleichung von f über S bereits eine Ganzheitsgleichung von f über dem Ideal $\mathfrak{J}$ darstellt.

Wir interessieren uns in dieser Arbeit für diese minimale Ganzheitsgleichung von f über S und insbesondere für ihren Grad. Man kann vermuten, daß dieser Grad stets mit der Milnor-Zahl übereinstimmt. Diese Vermutung wird für einige Beispielklassen bewiesen. Ein Resultat besagt, daß für isolierte Singularitäten in 2 Unbestimmten, bei denen für eine geeignete

Gewichtung der Unbestimmten der quasihomogene Leitterm eine isolierte Singularität ist, der Grad über der von den partiellen Ableitungen erzeugten Potenzreihenalgebra S gleich der Milnor-Zahl von f ist.(Insbesondere stimmt unsere Vermutung also für quasihomogene isolierte Singularitäten in 2 Unbestimmten.)

In den ersten beiden Paragraphen werden kurz grundlegende Begriffe und Sätze der Theorie der analytischen k-Algebren dargestellt.

In §3 wird das analytische Tensorprodukt zweier k-Algebren, die endlich über konvergenten Potenzreihenalgebren sind, untersucht. Wir verallgemeinern mit Hilfe des "differentiellen Regularitätskriteriums" aus §2 den bekannten Satz, daß im Fall k = $\mathbb{C}$ das analytische Tensorprodukt zweier reduzierter,normaler bzw. nullteilerfreier analytischer k-Algebren ebenfalls reduziert, normal bzw. nullteilerfrei ist.

In §4 führen wir den Begriff der isolierten Singularität ein, und in den Paragraphen 5 und 6 widmen wir uns der Berechnung der Milnor-Zahl.

In §6 wird die minimale Ganzheitsgleichung einer isolierten Singularität $f \in m(P)^2$ über $S = k\langle\langle f_{x_1}, .., f_{x_n} \rangle\rangle$ untersucht. Es wird gezeigt, daß grad (f) mit der Milnor-Zahl μ_S übereinstimmt, falls die Erweiterung der Körper der Brüche von S und P eine Galois-Erweiterung ist.

Scheja und Wiebe untersuchen in (18) diagonalisier-

bare k-Derivationen analytischer k-Algebren, d.h. Derivationen, deren Eigenvektoren aus dem maximalen Ideal das maximale Ideal erzeugen. Es wird der Begriff der "Graduierung" verallgemeinert und gezeigt, daß diagonalisierbare k-Derivationen k_+-Graduierungen liefern (und umgekehrt). Wir zeigen, daß sich eine diagonalisierbare k-Derivation einer nullteilerfreien analytischen k-Algebra auf die Normalisierung fortsetzen läßt und dort ebenfalls diagonalisierbar ist, falls sich der Monoid der Eigenwerte in $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ einbetten läßt (also z.B. falls nur nichtnegative rationale Eigenwerte existieren).

In §9 untersuchen wir quasihomogene isolierte Singularitäten. Es wird gezeigt, daß stets $\operatorname{grad}_S(f) = \mu(f)$ gilt, falls $f \in m(P)^3$ und der ganz-algebraische Abschluß von P in der normalen Hülle des Körpers der Brüche von P über dem Körper der Brüche von S ein Macaulay-Ring ist. Im Fall n=2 sind die beiden letzten Voraussetzungen überflüssig, und es reicht zu fordern, daß der Leitterm von f bezüglich einer geeigneten Gewichtung der Unbestimmten eine isolierte Singularität ist.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Hinweise möchte ich mich bei Herrn Scheja bedanken.

§1 Analytische Algebren

Im folgenden seien alle Ringe kommutativ und mit Einselement, wobei das Einselement und die 0 stets verschieden sein sollen. Moduln und Ringhomomorphismen seien stets unitär. Ist k ein Ring, so verstehen wir unter einer k-Algebra einen Ring R zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\varphi: k \to R$. Der "Strukturhomomorphismus" φ induziert dann auf natürliche Weise eine k-Modul-Struktur auf R. Sind R_1 und R_2 k-Algebren mit den Strukturhomomorphismen φ_1 und φ_2, so heißt ein Ringhomomorphismus $f: R_1 \to R_2$ ein k-Algebra-Homomorphismus, falls f mit den Homomorphismen φ_1 und φ_2 verträglich ist, d.h. wenn gilt:

$$f \circ \varphi_1 = \varphi_2$$

Ist k ein Körper, so bezeichnen wir mit $k\{X_1,\ldots,X_n\}$ die k-Algebra der formalen Potenzreihen über k in den Unbestimmten $X_1,\ldots,X_n$. Ein bewerteter Körper ist ein Körper k zusammen mit einer "Betragsfunktion" $|\ |: k \to \mathbb{R}$, für die gilt:

(1) $|x| > 0$ für alle $x \in k$, $x \neq 0$

(2) $|0| = 0$

(3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ für alle $x,y \in k$

Ist k ein bewerteter Körper, so heißt eine formale Potenzreihe $f = \sum_{\nu} a_\nu X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$ "konvergent", falls es ein $t>0$ gibt mit

$$\sum_{\nu} |a_\nu| \, t^{\nu_1+\ldots+\nu_n} < \infty$$

(Hierbei durchlaufe $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ alle n-Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen.)

Die Menge $P = k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ aller konvergenten Potenz-

reihen in $X_1,\ldots,X_n$ ist eine lokale k-Algebra mit dem maximalen Ideal $m(P) = PX_1+\ldots+PX_n$. Die Komplettierung von P bzgl. der m(P)-adischen Topologie ist $k\{X_1,..,X_n\}$. Ist ktrivial bewertet, so stimmt P mit der k-Algebra aller formalen Potenzreihen überein.

Definition 1.1 Es sei k ein bewerteter Körper. Eine k-Algebra heißt "analytische k-Algebra", falls sie Restklassenalgebra eines $k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ ist. "Analytische Homomorphismen" sind k-Algebra-Homomorphismen von analytischen Algebren.

Analytische Homomorphismen sind stets lokal und stetig. Von grundlegender Bedeutung für die Theorie der analytischen k-Algebren ist

Satz 1.2 (Weierstraßscher Vorbereitungssatz)
Es sei k ein bewerteter Körper. Mit P_i bezeichnen wir die k-Algebra $k\langle\langle X_1,\ldots,X_i\rangle\rangle$. (Es sei $P_0 = k$)
Es sei $f\in P_n$ und $f=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu X_n^\nu$, $g_\nu\in P_{n-1}$. Außerdem seien nicht alle g_ν Nichteinheiten in P_{n-1} . Das kleinste ν mit $g_\nu(0)\neq 0$ sei b . Dann gilt :

(1) $P_n = P_n f \oplus \bigoplus_{\nu=0}^{b-1} P_{n-1} X_n^\nu$ ("Division mit Rest")

(2) f ist assoziiert zu einem eindeutig bestimmten Polynom $w=X_n^b+r_{n-1}X_n^{b-1}+\ldots+r_0$, wobei alle $r_i\in m(P_{n-1})$. w heißt das zu f gehörende "Weierstraßpolynom" in X_n .

Gleichwertig zum Weierstraßschen Vorbereitungssatz ist

Satz 1.3 (Endlichkeitssatz)
Es seien A und B analytische k-Algebren und $\varphi: A\to B$

ein analytischer Homomorphismus, der auf B eine A-Modul-Struktur induziert. Dann ist B ein endlicher A-Modul genau dann, wenn $B/B\cdot\mathfrak{P}(m(A))$ ein endlicher k-Vektorraum ist. Ein System aus B ist minimales Erzeugendensystem über A genau dann, wenn die Restklassen in $B/B\cdot\mathfrak{P}(m(A))$ eine k-Basis bilden.

Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz hat wichtige Konsequenzen :

1.4 (1) Analytische k-Algebren sind noethersch,

(2) die Algebren $k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ sind faktoriell (und damit normal),

(3) analytische k-Algebren sind henselsch.

Die Aussage (3) besagt folgendes : ist A analytische k-Algebra und $F\in A[Z]$ ein normiertes Polynom in Z, dessen Restklasse in $k[Z]$ in ein Produkt teilerfremder normierter Polynome zerfällt, so zerfällt F bereits in normierte Polynome aus $A[Z]$, deren Restklassen in $k[Z]$ mit den gegebenen Faktoren übereinstimmen. Die Eigenschaft "henselsch" ist gleichwertig damit, daß alle endlichen A-Algebren direkte Produkte lokaler A-Algebren sind. Eine lokale k-Algebra B, die endlich über einer analytischen k-Algebra A liegt, braucht selbst keine analytische k-Algebra zu sein (Beispiel:endliche Körpererweiterungen von k). B ist jedoch analytische $\overline{k}$-Algebra, wobei $\overline{k} = B/m(B)$ eine endliche Erweiterung des bewerteten Körpers k ist. Eine k-Algebra A ist also genau dann endlich über einem Potenzreihenring $k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$, wenn

sie endliches direktes Produkt analytischer k_i-Algebren ist, wobei die k_i endliche Erweiterungen des bewerteten Körpers k sind. (Häufig wird der Begriff "analytische k-Algebra in diesem allgemeineren Sinne benutzt.)

Ist A eine analytische k-Algebra mit dim(A)=n ("dim"= Krulldimension) , so gibt es einen injektiven analytischen Homomorphismus $\varphi: k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle \longrightarrow A$, der endlich ist. Die Bilder $x_i = \varphi(X_i)$ bilden ein Parametersystem von A, und das Bild von φ bezeichnen wir mit $k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$.

Unter der "Einbettungsdimension" Dim(A) verstehen wir das minimale n, für daß es einen surjektiven analytischen Homomorphismus $\varphi: k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle \longrightarrow A$ gibt. Es ist $Dim(A) = \dim_k m(A)/m(A)^2$. Die regulären analytischen Algebren sind genau die mit Dim=dim , und dies sind genau die Potenzreihenalgebren $P_n = k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ $(P_0=k)$.

Die maximale Länge einer Primfolge aus m(A) heißt "homologische Kodimension" von A (oder auch "Profondeur"). Es ist stets $codh(A) \leqq dim(A)$. Gilt das Gleichheitszeichen, so heißt A "Macauleysch". In diesem Falle ist bereits jedes Parametersystem eine Primfolge, und A ist endlich und frei über einer Algebra $k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$.

§2 Differentialmoduln

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung analytischer Algebren ist der Begriff des "Differentialmoduls". Wir wiederholen kurz : (siehe z.B. (12))

Definition 2.1 Es sei k ein Ring, R eine k-Algebra, M ein R-Modul und $d:R\to M$ eine k-lineare Abbildung.

(1) d heißt "k-Derivation" von R, falls die "Produktregel" gilt, d.h. : $d(xy)=xd(y)+yd(x)$ f.a. $x,y\in R$

(2) d heißt "universelle k-Derivation" und M "univ. Differentialmodul" von R, falls es für jede andere k-Derivation $\delta:R\to N$ genau ein R-lineares $h:M\to N$ gibt mit : $hod=\delta$

(3) ist M endlicher R-Modul, und gilt (2) für alle endlichen R-Moduln N, so heißt d "univ.-endliche Derivation" von R und M "univ.-endl. Differentialmodul"von R .

Aus der universellen Eigenschaft folgt, daß universelle (-endliche) Derivationen und Differentialmoduln eindeutig bestimmt sind. Wir bezeichnen sie mit $d_k^\infty, D_k^\infty(R)$ bzw. $d_k, D_k(R)$. (Falls sie existieren.)

Der universelle Differentialmodul existiert stets, während der univ.-endliche Differentialmodul i.a. nicht existiert. Für analytische Algebren ist die Existenz gesichert :

2.2 (1) Für $P = k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$ ist

$$D_k(P) = P^n \quad ; \quad d(f) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

Es ist $dx_1=d(X_1),\ldots,dx_n=d(X_n)$ die Standardbasis von P^n. Die Komponenten von d(f) sind die partiellen Ableitungen von f.

(2) Für $A = P/(Pf_1+\ldots+Pf_r)$, $P = k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$:

$$D_k(A) = P^n/(f_1P^n+\ldots+f_rP^n+Pdf_1+\ldots+Pdf_r) ,$$

das d aus (1) induziert die univ.-endl.Deriv.

(3) Ist A endlich über P, so ist $A\hat{\otimes}_k A$ definiert (siehe 3.1). Ist $m:A\hat{\otimes}A\to A$ die Multiplikationsabbildung, d.h. gilt $m(f\otimes g)=fg$ für alle $f,g\in A$, so ist : $D_k(A) = \text{Kern } m/(\text{Kern } m)^2$, wobei $D_k(A)$ die Struktur eines $A\hat{\otimes}A/\text{Kern } m\ (\cong A)$ - Moduls trägt. Die univ.-endl. k-Derivation ist gegeben durch :

$$d(f) = \overline{f\otimes 1-1\otimes f}$$

Differentialmoduln und ihre Lokalisierungen sind in vielen Arbeiten untersucht worden. Wir interressieren uns für "Regularitätskriterien". Hierbei müssen gewisse Separabilitäts- und Reduziertheitsvoraussetzungen gemacht werden. Wir formulieren das "differentielle Regularitätskriterium" der Einfachheit halber nur für den Fall char k=0:

Satz 2.3 (Regularitätskriterium)

Es sei A eine analytische k-Algebra, wobei k die Charakteristik 0 besitzt. Es sei p ein Primideal in A. Dann ist A_p regulär genau dann, wenn $D_k(A)_p$ ein freier A_p-Modul ist.

Beweis : siehe z.B. (12).

Bemerkung: ist k vollkommen, so gilt : A_p ist genau dann regulär, wenn $D_k(A)_p$ frei ist und A_p reduziert ist.

Im Falle char k=0 stimmt also der "singuläre Ort" $\mathrm{Sing}(A) = \{p \in \mathrm{Spec}(A);\ A_p \text{ nicht regulär}\}$ überein mit dem "unfreien Ort von $D_k(A)$" $\mathrm{Unfrei}(A) = \{p \in \mathrm{Spec}(A); D_k(A)_p \text{ nicht frei}\}$. Der unfreie Ort läßt sich berechnen, wobei sich zeigt, daß er abgeschlossen (bzgl. der Zariski-Topologie) in Spec(A) liegt. Es gibt also ein Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ mit : $\mathrm{Unfrei}(D_k(A)) = N(\mathfrak{m}) = \{p \in \mathrm{Spec}(A);\ p \supseteq \mathfrak{m}\}$.

Wir stellen dies kurz dar : (siehe (12))

Für einen endlichen A-Modul sei : (A lokal, noethersch)

$$\mathrm{Supp}(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(A);\ M_p \neq 0\}$$

$$E_v(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(A);\ M_p \text{ wird nicht durch } v-1 \text{ Elemente erzeugt (über } A_p)\}$$

Für den "Träger" Supp(M) gilt :

$$\mathrm{Supp}(M) = N(\mathrm{Ann}\ M) = N(\mathfrak{F}_0(M))$$

Ist $x_1, \ldots, x_r \in A$ ein Erzeugendensystem von M mit $r \geq v$, so ist

$$E_v(M) = \bigcap_{i_1 < \ldots < i_r} \mathrm{Supp}(M/(Ax_{i_1} + \ldots + Ax_{i_r}))$$

Ist nun $M = A^n/U$ eine endliche Darstellung von M, so gilt :

$$\mathrm{Unfrei}(M) = \bigcup_{i+j \geq n} E_i(M) \cap E_j(U)$$, d.h. die Menge Unfrei(M) ist abgeschlossen, und die Berechnung eines Definitionsideals läßt sich auf die Berechnung von Determinantenidealen zurückführen. Für eine Darstellung $A = k\langle\langle x_1, \ldots, x_n \rangle\rangle / \mathfrak{n}$ einer analytischen Algebra mit $\mathfrak{n} = (f_1, \ldots, f_r)$ lassen sich also durch Anwendung der obigen Gleichungen Potenzreihen $g_1, \ldots, g_s$ berechnen mit: $\mathrm{Sing}(A) = N(A/(\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_s))$.

Nach einem Satz von Abyankar bedeutet dies im Falle $k=\mathbb{C}$, daß der Keim der Singularitätenmenge des analytischen Mengenkeims $\{f_1=\ldots=f_r=0\}$ durch die Gleichungen $g_1=\ldots=g_s=0$ beschrieben wird.

§3 Analytische Tensorprodukte

In der Kategorie der k-Algebren, die endlich über Potenzreihenalgebren $k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$ sind, existiert eine direkte Summe $\hat{\otimes}_k$, die folgendermaßen berechnet wird:

3.1 (1) $k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle \hat{\otimes}_k k\langle\langle x_{n+1},\ldots,x_m\rangle\rangle = k\langle\langle x_1,\ldots,x_m\rangle\rangle$.

(2) sind A und B endlich über den regulären analytischen k-Algebren P_1 und P_2, so ist :

$$A \hat{\otimes}_k B = A \otimes_{P_1} ((P_1 \hat{\otimes}_k P_2) \otimes_{P_2} B)$$

Es gilt :

3.2 1.) Die Algebren A und B sind auf natürliche Weise eingebettet in $A \hat{\otimes}_k B$;

2.) für Ideale $\mathfrak{a} \subset A$, $\mathfrak{b} \subset B$ gilt :
$(A/\mathfrak{a}) \hat{\otimes}_k (B/\mathfrak{b}) = A \hat{\otimes}_k B/(\mathfrak{a} \cdot A \hat{\otimes}_k B + \mathfrak{b} \cdot A \hat{\otimes}_k B)$;

3.) sind A und B analytische k-Algebren, so ist auch $A \hat{\otimes}_k B$ analytische k-Algebra ;

4.) für Ideale $\mathfrak{a} \subset A$, $\mathfrak{b} \subset B$ gilt :
$\mathfrak{a} \cdot A \hat{\otimes}_k B \cap \mathfrak{b} \cdot A \hat{\otimes}_k B = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot A \hat{\otimes}_k B$;

5.) Nichtnullteiler in A bzw. B sind Nichtnullteiler in $A \hat{\otimes}_k B$;

6.) die natürliche Abbildung $A \otimes_k B \longrightarrow A \hat{\otimes}_k B$ ist injektiv ;

7.) es ist $A \otimes_k B = A \hat{\otimes}_k B$ genau dann, wenn A oder B nulldimensional ist ;

8.) $\operatorname{Dim} A \hat{\otimes}_k B = \operatorname{Dim} A + \operatorname{Dim} B$

$\dim A \hat{\otimes}_k B = \dim A + \dim B$

$\operatorname{codh} A \hat{\otimes}_k B = \operatorname{codh} A + \operatorname{codh} B$

9.) sind $\varphi_i : A_i \to B_i$, $i=1,2$, endliche injektive analytische Homomorphismen, so ist auch

$$\varphi_1 \hat{\otimes} \varphi_2 : A_1 \hat{\otimes}_k A_2 \longrightarrow B_1 \hat{\otimes}_k B_2$$ endl.und injektiv;

10.) die Erweiterung $A \to A \hat{\otimes}_k B$ ist treuflach ;

11.) $D_k(A \hat{\otimes}_k B) = D_k(A) \otimes_A (A \hat{\otimes}_k B) \oplus D_k(B) \otimes_B (A \hat{\otimes}_k B)$.

Beweis: die meisten Aussagen werden in (2),(6),(8) bewiesen. Wir behandeln nur

7): ist A nulldimensional, so ist $A \otimes_k B$ endlich über B und ist direkte Summe sogar in der Kategorie aller k-Algebren. Es seien nun A und B nicht nulldimensional. O.B.d.A. seien A und B lokal. Dann gibt es nichtnilpotente $f \in \mathfrak{m}(A), g \in \mathfrak{m}(B)$. Das Element $F=1-fg$ ist Einheit in $A \hat{\otimes}_k B$, dessen Inverses $\sum_{\nu=0}^{\infty} f^\nu g^\nu$ nicht in $A \otimes_k B$ liegt.

Mit Hilfe des Regularitätskriteriums (§2) läßt sich nun sehr einfach zeigen, daß (unter gewissen Voraussetzungen) das analytische Tensorprodukt zweier nullteilerfreier (bzw. reduzierter,normaler) analytischer Algebren ebenfalls nullteilerfrei (bzw. reduz.,normal) ist. Wir zeigen zunächst : (A und B seien edl. über Potenzreihenalg.)

<u>3.3</u> Aus $\text{Unfrei}_A D_k(A) = N(\mathfrak{m})$ und $\text{Unfrei}_B D_k(B) = N(\mathfrak{h})$ folgt :

$$\text{Unfrei}_{A \hat{\otimes}_k B} D_k(A \hat{\otimes}_k B) = N(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{h} \cdot A \hat{\otimes}_k B)$$

Beweis : Wegen 3.2.11 gilt :

$$\begin{aligned} \text{Unfrei } D_k(A \hat{\otimes}_k B) &= \text{Unfrei } D_k(A) \otimes_A A \hat{\otimes}_k B \ \cup \\ &\quad \cup \text{Unfrei } D_k(B) \otimes_B A \hat{\otimes}_k B \\ &= N(\mathfrak{m} \cdot A \hat{\otimes}_k B) \cup N(\mathfrak{h} \cdot A \hat{\otimes}_k B) \\ &= N(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{h} \cdot A \hat{\otimes}_k B) \quad , \text{ w.z.b.w.} \end{aligned}$$

Bemerkung 3.4 : Es sei A ein Ring mit dem totalen Quotientenring K. Man sagt, ein A-Modul M "besitzt den Rang n", falls $K \otimes_A M$ ein projektiver K-Modul vom Rang n ist. Gleichwertig hierzu ist die Bedingung, daß es einen freien Untermodul $N \subseteq M$ mit rang F = n gibt, so daß M/F ein Torsionsmodul ist. Für analytische k-Algebren A,B gilt nun folgendes : $D_k(A \hat{\otimes}_k B)$ besitzt einen Rang als $A \hat{\otimes}_k B$ - Modul genau dann, wenn $D_k(A)$ und $D_k(B)$ Ränge als A- bzw. B-Moduln besitzen. Dies folgt aus der Treuflachheit von $A \hat{\otimes}_k B$ über A und B. In diesem Falle lassen sich die unfreien Orte der Differentialmoduln durch die v-ten Fittingideale beschreiben, wobei jeweils v=rang(..).

Es gilt :

$$\mathcal{F}_{n+m}(D_k(A \hat{\otimes}_k B)) = \mathcal{F}_n(D_k(A)) \cdot \mathcal{F}_m(D_k(B)) ,$$

wobei $n = \operatorname{rang} D_k(A)$, $m = \operatorname{rang} D_k(B)$.

Im Falle char k = 0 ist Sing(A) = Unfrei $D_k(A)$ für analytische k-Algebren (2.3). Ist ein Ideal $\mathfrak{N}$ bekannt, das den singulären Ort beschreibt (d.h. Sing A = $N(\mathfrak{N})$), so gibt es Kriterien für Reduziertheit und Normalität :

Satz 3.5 R sei ein lokaler Ring mit Sing(R) = $N(\mathfrak{N})$. Dann gilt : (1) R ist reduziert genau dann, wenn $\mathfrak{N}$ einen Nichtnullteiler enthält ;

(2) R ist normal genau dann, wenn $\mathfrak{N}$ eine Primfolge der Länge 2 enthält .

Beweis : siehe (12), S. 145,150.

Wir zeigen nun :

Satz 3.6 Es seien A und B lokale k-Algebren, die endlich über Potenzreihenalgebren (über k) sind. $A \hat{\otimes}_k B$ sei ebenfalls lokal. Außerdem seien die singulären Orte der Ringe A,B und $A \hat{\otimes}_k B$ gleich den unfreien Orten ihrer Differentialmoduln. Dann ist $A \hat{\otimes}_k B$ reduziert genau dann, wenn A und B reduziert sind.

Beweis : Es sei $\mathrm{Sing}(A) = N(\mathfrak{m})$, $\mathrm{Sing}(B) = N(\mathfrak{p})$.
Nach 3.3 folgt : $\mathrm{Sing}\, A \hat{\otimes}_k B = N(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p} \cdot A \hat{\otimes}_k B)$.
Sind $f \in \mathfrak{m}$ und $g \in \mathfrak{p}$ Nichtnullteiler in A bzw. B, so sind sie (3.2.5) Nichtnullteiler in $A \hat{\otimes}_k B$. Falls A und B reduziert sind, gibt es nach 3.5 solche f,g . Ihr Produkt ist Nichtnullteiler in $A \hat{\otimes}_k B$ und liegt in $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p} \cdot A \hat{\otimes}_k B$.
Nach 3.5 ist also auch $A \hat{\otimes}_k B$ reduziert. Die andere Schlußrichtung ist klar.

Satz 3.7 Es seien A und B lokale k-Algebren, die endlich über Potenzreihenalgebren mit Koeffizienten aus k sind. $A \hat{\otimes}_k B$ sei ebenfalls lokal. Die singulären Orte der Algebren A,B und $A \hat{\otimes}_k B$ seien gleich den unfreien Orten ihrer Differentialmoduln. Dann ist $A \hat{\otimes}_k B$ normal genau dann, wenn A und B normal sind.

Beweis : Es sei zunächst $R = A \hat{\otimes}_k B$ normal, und $z = \frac{x}{y}$ aus dem Ring der Brüche von A sei ganz über A. Dann ist y Nichtnullteiler in R. Da R normal ist, folgt : $z \in R$, d.h. $x \in Ry \cap A$ .Wegen der Natürlichen Isomorphie $A/Ay \hat{\otimes}_k B = R/Ry$ folgt : $x \in Ay$ und damit $z \in A$.

Es seien nun A und B normal, $\mathrm{Sing}(A) = N(\mathfrak{m})$, $\mathrm{Sing}(B) = N(\mathfrak{p})$.
Nach 3.5.2 gibt es Primfolgen $f_1, f_2 \in \mathfrak{m}$ und $g_1, g_2 \in \mathfrak{p}$.
Das Produkt $f_1 \cdot g_1$ ist Nichtnullteiler in R .

Wir zeigen : $f_2 \cdot g_2$ ist Nichtnullteiler modulo $R \cdot f_1 \cdot g_1$.
Es sei $F \cdot f_2 \cdot g_2 \in R \cdot f_1 \cdot g_1$. Dann gilt in $A/Af_1 \hat{\otimes}_k B = R/Rf_1$:
$\overline{F} \cdot \overline{f}_2 \cdot \overline{g}_2 = 0$.
Da $\overline{f}_2$ Nichtnullteiler in A/Af_1 und damit auch in $A/Af_1 \hat{\otimes}_k B$ ist, folgt

$$F \cdot g_2 \in R \cdot f_1 \cap R \cdot g_2 = R \cdot f_1 \cdot g_2 \qquad (3.2.4)$$

Kürzen durch den Nichtnullteiler g_2 ergibt : $F \in R \cdot f_1$.
Entsprechend zeigt man : $F \in R \cdot g_1$.
Insgesamt erhält man :

$$F \in R \cdot f_1 \cap R \cdot g_1 = R \cdot f_1 \cdot g_1$$

Nach 3.5.2 ist also R normal, w.z.b.w.

Bemerkung : $A \hat{\otimes}_k B$ braucht nicht lokal zu sein, falls A und B dies sind :

$$\mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \text{ als } \mathbb{R}\text{-Algebra.}$$

Satz 3.8 Es seien A und B lokale k-Algebren, die endlich über regulären analytischen k-Algebren sind. Das analytische Tensorprodukt $A' \hat{\otimes}_k B'$ der Normalisierungen A' und B' sei ebenfalls lokal. Außerdem sei vorausgesetzt, daß die singulären Orte der Ringe A',B' und $A' \hat{\otimes}_k B'$ mit den unfreien Orten ihrer Differentialmoduln übereinstimmen. Dann ist $A \hat{\otimes}_k B$ nullteilerfrei genau dann, wenn A und B nullteilerfrei sind.

Beweis : Ist $A \hat{\otimes}_k B$ nullteilerfrei, so auch die Unterringe A und B.
Es seien A und B nullteilerfrei. Die Einbettungen von A und B in ihre Normalisierungen A' und B' sind injektiv und endlich. Nach 3.2.9 ist also die natürliche Abbild.

$$A \hat{\otimes}_k B \longrightarrow A' \hat{\otimes}_k B'$$

endlich und injektiv. Nach 3.7 ist $A' \hat{\otimes}_k B'$ normal und daher nullteilerfrei. Also ist auch $A \hat{\otimes}_k B$ nullteilerfrei, w.z.b.w.

Bemerkung : Auch im Falle analytischer Algebren über Körpern mit char=0 ist die Vorauss. "$A' \hat{\otimes}_k B'$ lokal" nötig, wie folgendes Beispiel zeigt : $k = \mathbb{R}$,

$$A = \mathbb{R}\langle\langle x,y\rangle\rangle/(x^2+y^2)$$

$$B = \mathbb{R}\langle\langle u,v\rangle\rangle/(u^2+v^2)$$

A und B sind analytische nullteilerfreie $\mathbb{R}$ -Algebren. Wir bezeichnen mit x,y,u,v die Restklassen von X,Y,U,V in dem Ring $R = A \hat{\otimes}_k B = \mathbb{R}\langle\langle x,y,u,v\rangle\rangle/(x^2+y^2,u^2+v^2)$.

In R gilt : $ux+vy \neq 0$

$uy+vx \neq 0$, aber :

$(ux+vy)\cdot(uy+vx) = xy(u^2+v^2) + uv(x^2+y^2) = 0$, d.h.

$A \hat{\otimes}_k B$ ist nicht nullteilerfrei.

Es sind $A' = \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ und $B' = \mathbb{C}\langle\langle u\rangle\rangle$ keine analytischen $\mathbb{R}$-Algebren, und

$$A' \hat{\otimes}_k B' = (\mathbb{C} \hat{\otimes}_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \hat{\otimes}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}\langle\langle x,u\rangle\rangle = \mathbb{C}\langle\langle x,u\rangle\rangle \oplus \mathbb{C}\langle\langle x,u\rangle\rangle$$

ist nicht lokal !

Folgerung 3.9 Ist char k = 0 und sind A,B analytische k-Algebren, so gilt für $R = A \hat{\otimes}_k B$:

(1) R ist reduziert genau dann, wenn A und B reduziert sind ;

(2) R ist normal genau dann, wenn A und B normal sind;

(3) Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist R genau dann nullteilerfrei, wenn A und B nullteilerfrei sind .

Beweis : Folgt aus 3.6,7,8 und dem Regularitätskriterium.

§4 Isolierte Hyperflächensingularitäten

In den folgenden Kapiteln sei stets char k = 0 vorausgesetzt !

Es sei $P = k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$ und $f \in m(P)$. Die Restklassenalgebra $A = P/Pf$ heißt "Hyperflächen"-Algebra, d.h. die Einbettungsdimension ist um höchstens 1 größer als die Dimension. Der singuläre Ort von A läßt sich einfach berechnen :

$$\mathrm{Sing}(A) = N(A\cdot\overline{f}_{x_1} + \ldots + A\cdot\overline{f}_{x_n})$$

Die Algebra A ist genau dann regulär, wenn $Pf_{x_1}+\ldots+Pf_{x_n} = P$, d.h. wenn $f \notin m(P)^2$.

Definition 4.1 Eine Potenzreihe $f \in m(P)^2$ heißt "isolierte Singularität" (oder auch : f beschreibt eine isolierte Singularität), falls die partiellen Ableitungen $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$ ein m(P)-primäres Ideal erzeugen, d.h. falls es ein r gibt mit

$$m(P)^r \subseteq \mathfrak{J}_f = Pf_{x_1} + \ldots + Pf_{x_n} \quad .$$

f ist bereits dann isolierte Singularität, wenn $\mathrm{Sing}(A) = \{m(A)\}$, d.h. wenn das Ideal $\mathfrak{J}_f + Pf$ ein m(P)-primäres Ideal ist. Zum Beweis (siehe z.B.(18)) betrachte man ein Primideal $\mathfrak{p} \subset P$. Für die universell-endliche Derivation $\overline{d} : P/\mathfrak{p} \longrightarrow D_k(P/\mathfrak{p})$ gilt dann wegen $\mathrm{Kern}\ \overline{d} = k$: $f \in \mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{p} = m(P)$.

Die Aussage "f ist isolierte Singularität" ist äquivalent zu : $\dim_k P/\mathfrak{J}_f < \infty$.

Nach dem Endlichkeitssatz ist dies gleichwertig zu : P ist endlich (und damit auch frei) über $S = k\langle\langle f_{x_1},\ldots,f_{x_n}\rangle\rangle$.

Im Falle $k = \mathbb{C}$ und $n \geq 2$ ist f nach dem Hilbert-

schen Nullstellensatz genau dann isolierte Singularität, wenn f keine mehrfachen Faktoren hat und der Punkt $0 \in \mathbb{C}^n$ isoliert in dem Singularitätenmengenkeim des Nullstellenmengenkeims von f liegt.

Die Topologie isolierter Hyperflächensingularitäten im $\mathbb{C}^n$ ist Gegenstand umfangreicher Untersuchungen in der Funktionentheorie mehrerer Komplexer Veränderlicher. In Arbeiten von Milnor und Brieskorn wird hierzu die verzweigte Überlagerung $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, die durch $f_{x_1},\ldots,f_{x_n}$ definiert ist, benutzt. Die Blätterzahl $\mu(f)$ dieser Überlagerung läßt sich bekanntlich folgendermaßen berechnen :

$$\mu(f) = \dim P/\mathfrak{J} \quad , \text{ wobei } \mathfrak{J} = Pf_{x_1}+..+Pf_{x_n}$$

Definition 4.2 Die Zahl $\mu(f) = \dim_k P/(Pf_{x_1}+\ldots+Pf_{x_n})$ heißt die "Milnor-Zahl" der isolierten Singularität $f \in k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$.

Im Falle $k = \mathbb{C}$ gelten

4.3 (Milnor(7)): Für eine hinreichend kleine Kreisscheibe S um die $0 \in \mathbb{C}$ und eine hinreichend kleine Vollkugel K um die $0 \in \mathbb{C}^n$ habeb die Fasern $X_t = f^{-1}(\{t\}) \cap K$ für alle $t \in S, t \neq 0$ den Homotopietyp einer Vereinigung von $\mu(f)$ n-1 -Sphären .

4.4 (Brieskorn(5),Sebastiani(19)): Für den Poincare-Komplex von A = P/Pf

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow A \xrightarrow{d} D_k(A) \xrightarrow{d} \bigwedge^2 D_k(A) \xrightarrow{d} \ldots\ldots$$

gilt : $H^0(A) = \mathbb{C}$, $H^i(A) = 0$ für $i \neq 0, n-1$

$\dim_{\mathbb{C}} H^{n-1}(A) = \dim_{\mathbb{C}}(Pf + \mathfrak{J}/\mathfrak{J})$,wobei $\mathfrak{J} = Pf_{x_1}+..+Pf_{x_n}$.

Aus 4.3 folgt, daß die Zahl $\mu(f)$ unabhängig von den Koordinaten $X_1,..,X_n$ und von dem Erzeugenden f des Ideals Pf ist. Dies ist für beliebige Grundkörper k richtig :

1.) die Invarianz unter Koordinatentransformationen folgt aus der Kettenregel ;

2.) ist $e \notin P$ eine Einheit, so folgt wegen $(ef)_{x_i} = (ef)_{x_i} = ef_{x_i} + fe_{x_i}$, daß das Ideal $\mathfrak{m} = Pf + \mathfrak{J}$ nicht von dem Erzeugenden f des Ideals Pf abhängt ;

3.) die Invarianz von $\mu(f)$ folgt aus einem Satz von Scheja,Storch,Böger :

4.5 ((3),(13),(15)) : Jede Funktion $f \in m(P), P=k\langle\langle X_1,..,X_n\rangle\rangle$ erfüllt eine Ganzheitsgleichung über dem Ideal $\mathfrak{J} = Pf_{x_1} + .. + Pf_{x_n}$, d.h. es gibt eine Zahl r und Koeffizienten $b_i \in \mathfrak{J}^i$,i=1,..,r,, so daß gilt :

$$f^r + b_1 f^{r-1} + \ldots + b_r = 0 \quad .$$

Aus diesem Satz folgt nun für eine isolierte Singularität f, daß die Ideale $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{m} = Pf + \mathfrak{J}$ die gleiche Multiplizität besitzen. Da $e(\mathfrak{J}) = \mu(f)$ und da $\mathfrak{m}$ nicht von dem Erzeugenden f abhängt, folgt die Invarianz von $\mu(f)$ unter Multiplikationen mit Einheiten.

Isolierte Singularitäten sind in geeigneten Koordinaten stets Polynome. Dies ist von Mather (unveröffentlichtes Manuskript) gezeigt worden. Genauer gilt folgende Aussage :

4.6 (Bezeichnungen wie oben)

Ist $m(P)^k \subseteq \mathfrak{f}$ und ist $g \equiv f$ modulo $m(P)^{2k+1}$, so gibt es Koordinaten $U_1,\ldots,U_n$ mit $U_i \equiv X_i$ modulo $m(P)^2$ und

$$f(U_1,\ldots,U_n) = g \quad .$$

Im Falle formaler Potenzreihen ist dies durch eine rekursive Konstruktion der U_i leicht zu zeigen (siehe(7)). Aus einem Satz von M.Artin über die Lösungen analytischer Gleichungssysteme (1) folgt dann die Existenz konvergenter Potenzreihen U_i, die den gesuchten Automorphismus von $P = k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ liefern.

§5 Kurven

Wir betrachten nun den Fall n=2 . Außerdem setzen wir voraus, daß der Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist. (Für einige Sätze über die Milnorzahl ist dies jedoch nicht nötig, da nach 7.2 die Milnorzahl invariant unter Grundkörpererweiterungen ist.)

Im Falle n = 2 ist jede Potenzreihe $f \in m(P)^2, P=k\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ ohne mehrfache Faktoren eine isolierte Singularität. Im Falle $k=\mathbb{C}$ beschreibt die Gleichung $f(x,y)=0$ eine komplexe Kurve in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^2$.

Bekanntlich lassen sich Singularitäten von Kurven untersuchen, indem man mit Hilfe quadratischer Transformationen die ganz-abgeschl. Hülle A' der analytischen k-Algebra A = P/Pf berechnet. Da k algebraisch abgeschlossen ist und wegen dim(A')=1 ist die "Normalisierung" A' ein endliches direktes Produkt regulärer analytischer k-Algebren. Wir wollen diesen Prozeß kurz darstellen und zugleich die Formel

$$\mu(f) = 1 + 2\,l(A'/A) - (\text{Anz. d. Fakt. von } f)$$

beweisen. Diese Gleichung ist im Falle $k=\mathbb{C}$ von Milnor(7) gezeigt worden. Wir übernehmen einen Beweis von Mumford (unveröffentlichtes Manuskript).

Satz 5.1 Es sei $P=k\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ und $f \in m(P)$ ohne mehrfache Faktoren. Es sei :

$$\mu(f) = l(P/Pf_x + Pf_y)$$
$$\delta(f) = l(A'/A) \text{ , wobei } A=P/Pf$$
$$b(f) = \text{Anzahl der Faktoren von } f$$

Dann gilt : $\mu(f) = 1 + 2\cdot\delta(f) - b(f)$.

Beweis : Liegt f nicht in $m(P)^2$, so ist $\mu=0$, $\delta=0$, $b=1$.
Es sei nun $f\in m(P)^2$ und f_p der homogene Leitterm von f vom Grade $p\geq 2$. O.B.d.A. sei $f_p = X^p + \alpha_1 X^{p-1}Y + \ldots + \alpha_p Y^p$.
Es sei $S=k\langle\langle Y\rangle\rangle$ und $X^p + s_1 X^{p-1} + \ldots + s_p$, $s_i \in m(S)^i$, das zu f gehörende Weierstraßpolynom in Y . Der natürliche Homomorphismus $S \to A$ ist injektiv, und Y (genauer : die Restklasse von Y) ist Nichtnullteiler in A. Es sei

$$A^* = A[u] \quad , \text{ wobei } \quad u = \frac{x}{Y} \quad (x = \text{Restklasse von } X) \quad .$$

Das Element u liegt im totalen Quotientenring von A und erfüllt eine Ganzheitsgleichung über S :

$$u^p + \frac{s_1}{Y} u^{p-1} + \ldots + \frac{s_p}{Y^p} = 0 \quad .$$

Die Elemente $u^i Y^j$, $0 \leq j < i \leq p-1$, bilden eine k-Basis von A^*/A , d.h. : $\dim_k(A^*/A) = \binom{p}{2}$.

Sei $f^* = Y^{-p} \cdot f(UY,Y) = f_p(U,1) + Y \cdot f_{p+1}(U,1) + Y^2 f_{p+2}(U,1) + \ldots$
Die zu f^* in $k\langle\langle U,Y\rangle\rangle$ gehörende Zerlegung

$$f^* = \text{Einheit} \cdot (U^p + \frac{s_1}{Y} \cdot U^{p-1} + \ldots + \frac{s_p}{Y^p}) \quad \text{liefert:}$$

$$A^* = S[U]/(f^*)$$

Im Falle $f_p = X^p$ ist f^* ein Weierstraßpolynom, und A^* ist eine analytische k-Algebra.
Im allgemeinen ist $s_i = \alpha_i \cdot Y^i + \ldots$, und es gibt eine Zerlegung

$$U^p + \alpha_1 U^{p-1} + \ldots + \alpha_p = (U-a_1)^{\nu_1} \ldots (U-a_r)^{\nu_r} \quad ,$$

wobei $a_i \in k$, $\nu_1 + \ldots + \nu_r = p$.

Nach dem Henselschen Lemma zerfällt f^* :

$$f^* = e^* \cdot g_1 \cdot \ldots \cdot g_r \text{ , wobei } g_i = (U-a_i)^{v_i} + Y\cdot(\ldots) \quad ,$$

und f zerfällt entsprechend : $f = e \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$, e Einheit.

Es folgt $A^* = S[U]/(g_1) \oplus \ldots \oplus S[U]/(g_r)$, und jedes g_i ist Weierstraßpolynom in $T_i = U_i - a_i$, d.h. :

$$A^* \cong k\langle\langle T_1, Y\rangle\rangle/(g_1) \oplus \ldots \oplus k\langle\langle T_r, Y\rangle\rangle/(g_r) \quad .$$

Bezeichnen wir mit A_i die analytische Algebra P/Pf_i , so haben wir Inklusionen :

$$A \to A_1 \oplus \ldots \oplus A_r \to A_1^* \oplus \ldots \oplus A_r^* = A^* \text{ , und es gilt:}$$

$$l(A_1 \oplus \ldots \oplus A_r)/A) = \sum_{i<j} l(P/(f_i, f_j)) = \sum_{i<j} v_i v_j$$

$$l(A^*/(A_1 + \ldots + A_r)) = \sum_{i=1}^{r} \binom{v_i}{2}$$

$$l(A^*/A) = \binom{p}{2}$$

Es sei $\delta = \delta(A)$, $\delta_i = \delta(A_i^*)$, $\mu_i = \mu(A_i^*) = l(k\langle\langle T_i, Y\rangle\rangle/(g_{i_{T_i}}, g_{i_Y})$

b = Anz. der Faktoren von f , b_i = Anz. der Fakt. von g_i

Es ergibt sich :

$$2\delta - b + 1 = \sum_{i=1}^{r} 2\cdot\delta_i + p(p-1) - \sum_{i=1}^{r} b_i + 1$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (2\cdot\delta_i - b_i + 1) + (p-1)^2 + \sum_{i=1}^{r} (v_i - 1)$$

Wir beweisen 5.1 durch Induktion über $\delta(f)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt : $2\cdot\delta_i - b_i + 1 = \mu_i$, d.h. wir müssen zeigen :

$$\mu = \sum_i \mu_i + (p-1)^2 + \sum_i (v_i - 1)$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein :

$$F = Y^{-p+1} \cdot f_x(UY, Y) \quad \text{bzw.} \quad F_i = Y^{-v_i+1} \cdot f_{i_x}(UY, Y)$$

$G = Y^{-p+1} \cdot f_y(UY,Y)$ bzw. $G_i = Y^{-v_i+1} \cdot f_{i_Y}(UY,Y)$.

Wir können annehmen, daß f und alle Faktoren $f_1,..,f_r$ Weierstraßpolynome in X sind und daß f_p außer X^p auch das Monom $X^{p-1}Y$ enthält. Dann sind F,G bzw. F_i,G_i Polynome in U über S vom Grade p-1 bzw. v_i-1 . Eine einfache Berechnung von $l(S[\![U]\!]/(F,G))$ mit Hilfe der Resultanten von F und G zeigt :

$$l(S[\![U]\!]/(F,G)) = \mu(f) - (p-1)^2 \quad .$$

Die maximalen Ideale von $S[\![U]\!]/(F,G)$ sind genau die von den Restklassen von Y und $U-a_i$ erzeugten Ideale. Also :

$$l(S[\![U]\!]/(F,G)) = \sum_{i=1}^{r} l(S[\![U]\!]_{(Y,U-a_i)}/(F,G))$$

$$= \sum_{i=1}^{r} l(k\langle\!\langle Y,U-a_i\rangle\!\rangle/(F_i,G_i)) \quad .$$

Es bleibt noch zu zeigen :

$$l(k\langle\!\langle Y,U-a_i\rangle\!\rangle/(F_i,G_i)) = v_i - 1 + l(k\langle\!\langle Y,U-a_i\rangle\!\rangle/(g_{i_Y},g_{i_{U-a_i}})) \quad .$$

Wir können annehmen, daß $r=1, f=f_1, g=g_1, a_1=0$.

Es ergibt sich :

$$F = g_U = \sum_{\nu\geq 0} f_{p+\nu_x}(U,1)\cdot Y^{\nu}$$

$$G = \sum_{\nu\geq 0} f_{p+\nu_y}(U,1)\cdot Y^{\nu}$$

$$g_y = \sum_{\nu\geq 0} f_{p+\nu}(U,1)\cdot \nu \cdot Y^{\nu-1}$$

Die Euler-Formel liefert : $(p+\nu)\cdot f_{p+\nu} = X\cdot f_{p+\nu_x} + Y\cdot f_{p+\nu_y}$

und somit $(p+\nu)\cdot Y^{\nu}\cdot f_{p+\nu}(U,1) = UY^{\nu} f_{p+\nu_x}(U,1) + Y^{\nu} f_{p+\nu_y}(U,1)$,

Damit gilt im Ring $\tilde{P} = k\langle\!\langle Y,U\rangle\!\rangle$: $G+UF = pg+Yg_y$ und daher : $\tilde{P}F + \tilde{P}G = \tilde{P}F + \tilde{P}(G+UF) = \tilde{P}g_U + \tilde{P}(Yg_y+pg)$.

Offensichtlich ist $l(\tilde{P}/(g_U, Yg_Y)) = p-1+l(\tilde{P}/(g_U, g_y))$.

Es genügt also zu zeigen, daß die Ideale $\mathfrak{m}_1 = (g_U, Yg_y+pg)$ und $\mathfrak{m}_2 = (g_U, Yg_y)$ die gleiche Kodimension in $\tilde{P}$ haben.

Dazu wiederum genügt es zu zeigen, daß für alle k-Algebra-Homomorphismen $\phi : \tilde{P} \longrightarrow k\langle\langle t \rangle\rangle$ die Ideale $k\langle\langle t\rangle\rangle \cdot \phi(\mathfrak{m}_1)$ und $k\langle\langle t\rangle\rangle \cdot \phi(\mathfrak{m}_2)$ übereinstimmen. (siehe (13))

Sei $\phi(U) = a(t)$, $\phi(Y) = b(t)$.

Es gibt ein $u(t) \equiv 1$ modulo $m(k\langle\langle t\rangle\rangle)$ und eine natürliche Zahl n mit

$$n \cdot \phi(g) = n \cdot g(a(t),b(t)) = u(t) \cdot t \cdot g(a(t),b(t))_t$$
$$= u(t) \cdot (g_U(a(t),b(t)) \cdot a'(t) + g_y(a(t),b(t)) \cdot b'(t)) \cdot t$$
$$= \phi(g_U) \cdot u_1(t) \cdot n_1 \cdot a(t) + \phi(g_y) \cdot u_2(t) \cdot n_2 \cdot b(t) .$$

Hierbei sind n_1, n_2 natürliche Zahlen und u_1, u_2 Einheiten in $k\langle\langle t\rangle\rangle$, die kongruent zu 1 modulo $m(k\langle\langle t\rangle\rangle)$ sind.

Es folgt :

$$\phi(g) = \frac{n_1}{n} \cdot u_1(t) \cdot \phi(Ug_U) + \frac{n_2}{n} \cdot u_2(t) \cdot \phi(Yg_y) \quad \text{und}$$

$$\phi(Yg_y+pg) = (1+p \cdot \frac{n_2}{n} \cdot u_2(t)) \cdot \phi(Yg_y) + \frac{n_1}{n} \cdot u_1(t) \cdot a(t) \cdot \phi(g_U) .$$

Da der Faktor $1+p \frac{n_2}{n} u_2(t)$ eine Einheit ist, folgt die Behauptung. Damit ist 5.1 bewiesen.

Folgerung 5.2 Ist $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$ eine Zerlegung der isolierten Singularität $f \in P = k\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ in paarweise teilerfremde Faktoren, so gilt für die Zahlen $\delta, \delta_i, \mu, \mu_i$:

1.) $\delta = \sum_i \delta_i + \sum_{i<j} l(P/(f_i,f_j))$

2.) $\mu = \sum_i \mu_i + 2 \cdot \sum_{i<j} l(P/(f_i,f_j)) - r + 1$

Beweis : Für $A = P/(f)$, $A_i = P/(f_i)$ gilt

$$l(A_1 \oplus \ldots \oplus A_r/A) = \sum_{i<j} l(P/(f_i,f_j))$$

Daraus folgt 1.). Die zweite Formel folgt aus 5.1 .

Ist f irreduzibel, so liefert der obige Prozeß eine Parameterdarstellung der Kurve f=0 :

Beispiel 5.3: $f = X^3 + XY^5 + Y^7$

$A = k\langle\langle X,Y\rangle\rangle/(f)$

$A^* = k\langle\langle U,Y\rangle\rangle/(U^3 + UY^3 + Y^4)$

$A^{**} = k\langle\langle V,Y\rangle\rangle/(V^3 + VY + Y) = A'$, $\delta = \binom{3}{2} + \binom{3}{2} = 6$, $b=1$, $\mu = 12$

Die Inklusionen $A \to A^* \to A^{**} \tilde{=} k\langle\langle Z\rangle\rangle$

$$\overline{X} \to \overline{UY} \ , \ \overline{U} \to \overline{VY}, \ \overline{V} \to Z$$

liefern eine Parameterdarstellung :

$$x = \frac{Z^7}{(1+Z)^2}$$

$$y = \frac{-Z^3}{(1+Z)^2}$$

Eine Untersuchung der Monome zeigt : $l(\mathfrak{m}/\mathfrak{k}) = 1$

Ist f reduzibel, so kann die Primfaktorzerlegung von f bestimmt werden :

Beispiel 5.4: $f = X^4 + XY^5 + Y^7$

$A = k\langle\langle X,Y\rangle\rangle/(f)$

$A = k\langle\langle U,Y\rangle\rangle/(U^4 + UY^2 + Y^3)$

$A = k\langle\langle U\rangle\rangle[Z]/(Z^3 + Z^2 + U)$

Das Polynom $g(Z) = Z^3 + Z^2 + U$ zerfällt nach dem Henselschen Lemma :

$$g(Z) = (Z^2 + a(U) + b(U))\,(Z + 1 + c(U))$$ mit

$a,b,c \in m(k\langle\langle U\rangle\rangle)$, die sich berechnen lassen :

$a = -U + \ldots$, $b = U + \ldots$, $c = U + \ldots$

Mit $T = Z+1$ gilt :

$A^{**} = k\langle\langle U,Z\rangle\rangle/(Z^2-(U+..)Z+(U+..)) \oplus k\langle\langle U,T\rangle\rangle/(T+U+..)$

Da $A^{**} = A'$, erhalten wir :

$$\delta = \binom{3}{2} + \binom{4}{2} = 9 \ , \ b = 2 \ , \ \mu = 17$$

Eine genaue Untersuchung der Monome liefert: $l(\mathfrak{a}/\mathfrak{k}) = 2$

Die Inklusionen $A \to A^{*} \to A^{**}$ liefern eine Primfaktorzerlegung von f.

Beispiel 5.5: $f = X^4 + X^2Y^2 + Y^5$

$A^{*} = k\langle\langle Y\rangle\rangle[U]/(U^4 + U^2 + Y^5)$

A^{*} zerfällt in ein direktes Produkt von 3 regulären Algebren :

$$A^{*} = k\langle\langle U,Y\rangle\rangle/(U^2+(..)Y+(Y+..)) \oplus k\langle\langle U+i,Y\rangle\rangle/(U+i+..) \oplus k\langle\langle U-i,Y\rangle\rangle/(U-i+..)$$

Also ist $\delta = \binom{4}{2} = 6$, $b=3$, $\mu=10$.

Man zeigt : $l(\mathfrak{m}/\mathfrak{k}) = 1$.

Besitzt f mehrfache Faktoren, so stagniert der obige Prozeß nicht. Man erkennt dies daran, daß eine Algebra des Typs $k\langle\langle U,V\rangle\rangle/(U^k)$, $k \geq 2$, auftritt. Immerhin erhält ma man auch in diesem Falle eine Primfaktorzerlegung von f.

Beispiel 5.6: Der homogene Leitterm f_p von $f=f_p+f_{p+1}+..$ zerfalle in paarweise verschiedene Linearfaktoren. Dann gilt :

$$\delta = \binom{p}{2} \quad , \quad \mu = (p-1)^2 \ .$$

Beispiel 5.7: Es gebe positive rationale Zahlen a,b , so daß der Leitterm $\overline{f}$ von f bzgl. der Bewertung $v(X^iY^j)=ia+jb$ eine isolierte Singularität ist. Dann ist

1.) $b(f) = b(\overline{f})$

2.) $\delta(f) = \delta(\overline{f})$

3.) $\mu(f) = \mu(\overline{f})$

Beweis : Es sei $f=f_p+f_{p+1}+\dots$ die Zerlegung von f in homogene Komponenten (homogen im üblichen Sinne). Falls a=b , so ist $f_p=\overline{f}$. Da $\overline{f}$ in Linearfaktoren zerfällt und diese paarweise verschieden sein müssen, folgt nach 5.6 die Behauptung.

Sei nun O.B.d.A. a > b. Dann gibt es 2 Fälle :

A) X^p tritt in $\overline{f}$ und f_p gemeinsam auf ;

B) $X^{p-1}Y$ tritt in $\overline{f}$ und f_p gemeinsam auf .

Fall A) : Es sei $g = Y^{-p}\cdot f(UY,Y) \in k\langle\langle U,Y\rangle\rangle$. Der Leitterm $\overline{g}$ von g bzgl. der Bewertung $v(U^iY^j)= i(a-b)+ bj$ läßt sich berechnen : $\overline{g} = Y^{-p}\cdot\overline{f}(UY,Y)$.

$\overline{g}$ ist also ebenfalls isolierte Singularität, und für die Milnorzahlen gilt : $\mu(g) = \mu(f) - p(p-1)$

$\mu(\overline{g}) = \mu(\overline{f}) - p(p-1)$.

Aus $\mu(g) = \mu(\overline{g})$ würde also folgen : $\mu(f) = \mu(\overline{f})$.

Fall B) : Es ist $f_p = \alpha\cdot X^{p-1}Y$, $\alpha \neq 0$. Nach Anwendung der Transformation $\Phi : \begin{cases} X \to X \\ Y \to X+Y \end{cases}$

erhalten wir eine Zerlegung

$$\Phi(f) = (\alpha\cdot X^{p-1} + A)\cdot(X + Y + B) ,$$

wobei $A \in m(P)^p$, $B \in m(P)^2$.

Die Rücktransformation liefert :

$f = f_1\cdot f_2$, wobei $f_1 \equiv \alpha\cdot X^{p-1}$ modulo $m(P)^p$

$f_2 \equiv Y$ modulo $m(P)^2$.

Bezüglich der gegebenen Bewertung gilt für die Leitterme : $\overline{f} = \overline{f}_1\cdot\overline{f}_2$.

Also sind auch $\overline{f}_1$ und $\overline{f}_2$ isolierte Singularitäten.

Für die Milnorzahlen gilt nach 5.2 :

$$\mu(f) = \mu(f_1) + \mu(f_2) + 2\cdot l(P/(f_1,f_2)) - 1$$

$$\mu(\overline{f}) = \mu(\overline{f}_1) + \mu(\overline{f}_2) + 2\cdot l(P/(\overline{f}_1,\overline{f}_2)) - 1$$

Die homogenen Leitterme von $f_1,\overline{f}_1$ und $f_2,\overline{f}_2$ sind $\alpha\cdot X^{p-1}Y$ und Y. Also ist $l(P/(f_1,f_2)) = l(P/(\overline{f}_1,\overline{f}_2)) = p-1$.

Aus den Gleichungen $\mu(f_1) = \mu(\overline{f}_1)$ und $\mu(f_2) = \mu(\overline{f}_2)$ würde also folgen : $\mu(f) = \mu(\overline{f})$.

In beiden Fällen ist es also möglich, das Problem zu reduzieren. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir jeweils den Fall a=b , der zu Beginn behandelt wurde, oder den Fall p=1, in dem gilt : $\mu(f) = \mu(\overline{f}) = 0$.

Damit ist 3.) bewiesen. Entsprechend zeigt man 2.). Aussage 1.) folgt dann aus 5.1 .

Beispiel 5.8 : Der Leitterm vun f bzgl. der Bewertung $v(X^iY^j)=ai+bj$, a und b positiv , sei $\overline{f} = X^A + Y^B$.

Dann gilt :

$$b(f) = ggT(A,B)$$

$$\delta(f) = \frac{1}{2}\left((A-1)(B-1) + ggT(A,B) - 1\right)$$

$$\mu(f) = (A-1)(B-1)$$

Beweis : Nach 5.7 können wir annehmen : $f=\overline{f}$.

Der Prozeß des Auflösens liefert nach endlich vielen Schritten die k-Algebra $k\langle\langle V,W\rangle\rangle/(V^s + W^s)$ mit $s=ggT(A,B)$.

Also ist $b(f)= s$. Der Rest ist klar.

Beispiel 5.9: Von Reiffen stammt folgendes Beispiel (10):

$$f = X^q + XY^{p-1} + Y^p \quad , \text{ wobei } 4\leq q<p \ .$$

Für alle diese Funktionen gilt : $f \notin pf_x + pf_y$

Nach 5.8 folgt, daß $\mu(f) = (p-1)(q-1)$ und daß f genau dann irreduzibel ist, wenn p und q teilerfremd sind.

Eine andere Beschreibung von Singularitäten ebener Kurven liefert die Methode der Newton-Polygone. Für ein irreduzibles $f \in P = k\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ mit $f(X,0) \neq 0$ läßt sich eine Inklusion $L : A \longrightarrow A' = k\langle\langle t\rangle\rangle$, $A = P/Pf$, finden, für die gilt :

$$L(\overline{Y}) = t^p$$

$$L(\overline{X}) = a(t) = a_q t^q + \ldots\ldots , \quad a_q \neq 0 \ .$$

Eine solche Darstellung

$$x = \sum_{\nu \geq q} a_\nu \, y^{\frac{\nu}{p}} \quad , \quad x,y = \text{Restklassen von } X,Y \text{ in } A,$$

heißt "Puiseux-Reihe". Nach einer geeigneten Koordinatentransformation in P kann man erreichen, daß $q > p$. Wir definieren :

$$\beta_0 = p$$

$$\beta_{i+1} = \min\left\{\nu ;\ a_\nu \neq 0,\ ggT(\beta_0,\ldots,\beta_i) \neq ggT(\beta_0,\ldots,\beta_i,\nu)\right\}$$

Die Folge der $ggT(\beta_0,\ldots,\beta_i)$ heißt die "Charakteristik" der Kurve $f(x,y)=0$. Da im Körper der Brüche von A liegt, gibt es ein k mit $ggT(\beta_0,\ldots,\beta_k)=1$. Läßt man die Zahlen $=1$ weg, so hat die Charakteristik also stets eine endliche Länge.

Das zu f assoziierte Weierstraßpolynom in X läßt sich aus der Potenzreihe a(t) zurückgewinnen :

$$f = \text{Einheit} \cdot \prod_{i=1}^{p} (X - a(w^i \cdot Y^{\frac{1}{p}}))$$

Hierbei sei w eine primitive p-te Einheitswurzel.

5.10 $\qquad \mu = 2\delta = \sum_{i \geq 1} (\beta_i - 1)(ggT(\beta_0,\ldots,\beta_{i-1}) - ggT(\beta_0,\ldots,\beta_i))$

Beweis : Wir setzen nicht voraus, daß $p < q$.

Für Koordinaten f ist 5.10 erfüllt, da $\delta = 0$ und $ggT(\beta_0,\beta_1) = 1$. Seien nun $p,q \geq 2$ und $A = k\langle\langle t^p, a(t)\rangle\rangle$. Wir definieren wie in 5.1 :

$$A^* = \begin{cases} k\langle\langle t^p, \frac{a(t)}{t^p}\rangle\rangle & \text{, falls } q>p \\ k\langle\langle t^{p-q}, a(t)\rangle\rangle & \text{, falls } q<p \end{cases} .$$

Im Falle p=q ist $A=k\langle\langle t^p, a(t)-a_p t^p\rangle\rangle$, und wir definieren A^* wie oben. Es gilt : $l(A^*/A) = \begin{cases} \binom{p}{2} & \text{im Falle } q>p \\ \binom{q}{2} & \text{im Falle } q<p. \end{cases}$

Die Charakteristik ändert sich wie folgt :

$$\beta_i^* = \beta_i - p \quad \text{für alle } i\geq 1 \text{ im Falle } q>p$$
$$\beta_0^* = \beta_0 - q \quad \text{im Falle } q<p.$$

In beiden Fällen rechnet man nach, daß die obige Summe um die Zahl $l(A^*/A)$ kleiner geworden ist. Nach endlich vielen Schritten erhält man die obige Formel.

Folgende Bemerkung :

5.11 : Sind p und q bereits teilerfremd, so ist der Leitterm von f bzgl. der Bewertung $v(X^iY^j)=qi+pj$ von der Form aX^p+bY^q , a und b nicht 0 .

Beweis : Es gilt :

$$f = \text{Einheit} \cdot \prod_{\lambda=1}^{p} (X-a(w^\lambda t)) = X^p + s_1 X^{p-1} + \ldots + s_p ,$$

wobei die s_i in $m(k\langle\langle Y\rangle\rangle)^{i+1}$ liegen. Eine Betrachtung der Grade der s_i liefert die Behauptung.

§6 Berechnung der Milnor-Zahl

Die praktische Berechnung der Milnor-Zahl einer isolierten Singularität f kann recht mühsam sein, falls n größer als 2 und der Untergrad von f groß ist. Ein Satz von Scheja,Storch kann hierbei hilfreich sein.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein :

$P = k\langle\langle x_1,..,x_n\rangle\rangle$, $S = k\langle\langle f_{x_1},..,f_{x_n}\rangle\rangle$, $\mathfrak{k} = Pm(S)$

Die partiellen Ableitungen f_{x_i} stellen wir als Linearkombinationen der X_i dar :

$$f_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \quad , \quad a_{ij} \in P \quad .$$

6.1 : Für die Determinante $\Delta = \det(a_{ij})$ gilt :

(1) die Restklasse von Δ in $P/\mathfrak{k}$ ist unabhängig von der Darstellung von f ;

(2) $(P/\mathfrak{k}) \cdot \overline{\Delta} = \mathcal{F}_{0_{P/\mathfrak{k}}}(m(P/\mathfrak{k})) = Ann_{P/\mathfrak{k}}(m(P/\mathfrak{k})) \neq 0$.

Beweis : Siehe (21).

Man sagt auch : $\overline{\Delta}$ ist "universeller Nullteiler" von $P/\mathfrak{k}$. Die Funktionaldeterminante $\mathfrak{J} = \det(f_{x_i x_j})$ der f_{x_i} , d.h. die Determinante der Hesse-Matrix von f, hängt nun folgendermaßen mit der Determinante Δ zusammen :

Satz 6.2 (siehe (17)) : $\mathfrak{J} \equiv \mu \cdot \Delta$ modulo $\mathfrak{k}$, wobei $\mu = rang_s P$ die Milnor-Zahl von f ist.

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich häufig die Milnor-Zahl sehr einfach berechnen. Hierzu ein Beispiel :

$$f = X^4 + XY^4 + YZ^6$$

$$f_x = 4X^3 + Y^4$$
$$f_y = 4XY^3 + Z^6$$
$$f_z = 6YZ^5$$

, d.h.:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4X^2 & Y^3 & 0 \\ 0 & 4XY^2 & Z^5 \\ 0 & 0 & 6YZ^4 \end{vmatrix}$$

Also : $\Delta = 96\, X^3Y^3Z^4$.

Eine einfache Rechnung (Kongruenzen modulo $\mathfrak{J}$) zeigt :

$X^4 \equiv -\frac{1}{4} XY^4 \equiv \frac{1}{16} YZ^6 \equiv 0$, d.h. $X^4 \in \mathfrak{J}$

Wegen $Y^8 = (Y^4)^2 \equiv (-4X^3)^2 = 16X^6 \equiv 0$ folgt $Y^8 \in \mathfrak{J}$, und

$Z^{24} = (Z^6)^4 \equiv (-4XY^3)^4 = 256\, X^4Y^{12} \in \mathfrak{J}$.

Also ist f isolierte Singularität. Weiter gilt :

$$\mathfrak{J} = \begin{vmatrix} 12X^2 & 4Y^3 & 0 \\ 4Y^3 & 12XY^2 & 6Z^5 \\ 0 & 6Z^5 & 30YZ^4 \end{vmatrix} = 4320X^3Y^3Z^4 - 480Y^7Z^4 - 432X^2Z^{10}$$

Es ist wegen $Y^4 \equiv -4X^3$: $Y^7Z^4 \equiv -4X^3Y^3Z^4$,

und wegen $Z^6 \equiv -4XY^3$: $X^2Z^{10} \equiv -4X^3Y^3Z^4$.

Also : $\mathfrak{J} \equiv (4320 + 1920 + 1728)X^3Y^3Z^4 = 7968X^3Y^3Z^4 = 83\,\Delta$.

Für die Milnor-Zahl gilt also :

$$\mu = 83 \quad .$$

In einem wichtigen Spezialfall läßt sich μ mit Hilfe von 6.2 sofort angeben. Existieren $a_1,\dots,a_n \in k$, so daß f nur Monome $X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}$ mit $a_1i_1+\dots+a_ni_n=1$ enthält, so gilt die Eulersche Formel :

$$f = a_1X_1f_{X_1} + \dots + a_nX_nf_{X_n} \quad .$$

Für derartige Potenzreihen gilt :

Satz 6.3 : Ist $f \in P$ isolierte Singularität mit $f = a_1X_1f_{X_1} + \dots + a_nX_nf_{X_n}$, $a_1,\dots,a_n \in k$, so gilt :

$$a_1\cdots a_n \cdot \mu = (1-a_1)\cdots(1-a_n)$$

Sind alle $a_i \neq 0$, so ist also $\mu = (\frac{1}{a_1} - 1)\cdots(\frac{1}{a_n} - 1)$.

(Wir werden sehen, daß im Falle $f \in m(P)^3$ die a_i stets positive rationale Zahlen sind.)

Beweis : Differenzieren der Gleichung $f = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i f_{X_i}$ nach X_i liefert

$$f_{X_i} = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j f_{X_i X_j} + a_i f_{X_i} \quad .$$

Also ist $\sum_{j=1}^{n} a_j X_j f_{X_i X_j} = (1-a_i)\, f_{X_i}$.

Die Behauptung folgt nun aus dem Hilfssatz

6.4 : $g_1, \ldots, g_n \in P$ sei ein Parametersystem aus $m(P)$. Für die k-Derivation $\delta = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i}$, $a_i \in k$, gelte: $\delta(g_i) = p_i g_i$, $p_i \in k$. Dann verschwinden alle a_i genau dann, wenn alle p_i verschwinden. Ist dies nicht der Fall, so gilt :

$$l(P/(g_1, \ldots, g_n)) = \frac{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \quad .$$

Beweis von 6.4 : Sei zunächst ein $p_i = 0$. Dann bilden die Elemente $p_1 g_1, \ldots, p_n g_n$ kein Parametersystem. Wegen $p_i g_i = \sum_{j=1}^{n} a_j g_{i_{X_j}} \cdot X_j$ ist also

$$\det(a_j g_{i_{X_j}}) = a_1 \ldots a_n \cdot \det(g_{i_{X_j}}) \in \mathfrak{P} := (g_1, \ldots, g_n) \text{ (siehe (21)).}$$

Da die die Funktionaldeterminante $\mathfrak{J} = \det(g_{i_{X_j}})$

aber nicht in $\mathfrak{P}$ liegt, muß ein a_i verschwinden.

Falls alle p_i nicht verschwinden, gilt :

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{p_i} \cdot X_j \cdot g_{i_{X_j}} \qquad \text{und somit}$$

$$\Delta = \det\left(\frac{a_i}{p_i} g_{i x_j}\right) = \det \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \cdot \det(g_{i x_j}) \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n} \cdot \mathcal{J} \notin \mathcal{K} \quad .$$

Also ist $l(P/(g_1,\ldots,g_n)) = \dfrac{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, w.z.b.w.

Ist der homogene Leitterm von f bereits eine isolierte Singularität , so gilt :

Satz 6.5 : Es sei $f \in P = k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$ und $f = f_p + f_{p+1} + \ldots$ die Zerlegung von f in homogene Bestandteile, wobei $f_p \neq 0$, $p \geq 2$. Dann gilt :

1.) Ist f_p isolierte Singularität, so auch f ;

2.) Ist f_p isolierte Singularität, so gilt außerdem :

$$l(P/(f_{x_1},\ldots,f_{x_n})) = l(P/(f_{p x_1},\ldots,f_{p x_n}) = (p-1)^n$$

Beweis : Zunächst zu 1.). f_p sei isol.Singularität.

Es sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 \\ \\ A_n \end{pmatrix} \in P^n \; ; \sum_{i=1}^{n} A_i f_{x_i} = 0 \right\}$ der Modul

der Relationen der f_{x_i} , U = der von den regulären

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_{x_j} \\ \vdots \\ -f_{x_i} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{i-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \text{j-te Zeile} \\ \\ \end{matrix}$$

erzeugte Untermodul von M.

Mit $v\left(\begin{pmatrix} A_1 \\ \\ A_n \end{pmatrix}\right)$ bezeichnen wir den minimalen Untergrad aller A_i. Sei nun $V = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \in M$ und $r = v(V)$.

Für die homogenen Komponenten $\overline{A}_i$ vom Grade r der A_i gilt : $\overline{A}_i \cdot f_{p_{x_i}} = 0$.

Also wird der Vektor $\begin{pmatrix} \overline{A}_1 \\ \vdots \\ \overline{A}_n \end{pmatrix}$ von Vektoren der Form

$R_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_{p_{x_j}} \\ \vdots \\ -f_{p_{x_i}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt , und zwar O.B.d.A. mit homogenen Koeffizienten g_{ij} vom Grad r-(p-1). Der Vektor

$\begin{pmatrix} \overline{A}_1 \\ \vdots \\ \overline{A}_n \end{pmatrix} - \sum_{i<j} g_{ij} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_{x_j} \\ \vdots \\ -f_{x_i} \\ 0 \end{pmatrix}$ hat einen (minimalen)

Untergrad $\geqslant r+1$ und liegt in M.

Man erhält also durch Induktion :

$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \in U + m(p)^k \cdot p^n$ für alle k, d.h. $\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \in U$.

Daraus folgt $M = U$, d.h. 1.) ist bewiesen.

Um zu zeigen, daß die Ideale $\mathfrak{f} = (f_{x_1},\ldots,f_{x_n})$ und $\overline{\mathfrak{f}} = (f_{p_{x_1}},\ldots,f_{p_{x_n}})$ die gleiche Kodimension in P besitzen, genügt es nach einem Satz von Scheja (siehe (13)) zu zeigen, daß für jeden k-Algebra-Homomorphismus $\phi : P \longrightarrow R = k\langle\langle t\rangle\rangle$ gilt :

$$l(R/R\cdot\phi(\mathfrak{f})) = l(R/R\cdot\phi(\overline{\mathfrak{f}})) \quad .$$

Es sei $\phi(X_i) = a_{r_i}\cdot t^{r_i}+\ldots\ldots$, $a_{r_i}\neq 0$, und $r=\min\{r_i\}$.

(Wir setzen $r_i = \infty$, falls $\phi(X_i)= 0$.)

O.B.d.A. verschwinde ϕ nicht auf allen X_i .

Wir betrachten nun den Homomorphismus $\overline{\phi} : P \longrightarrow R$ mit

$$\overline{\phi}(X_i) = \begin{cases} a_{r_i}\cdot t^{r_i} & , \text{ falls } r_i=r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da alle $f_{p_{x_i}}$ homogen vom Grade p-1 sind, gilt :

$$R\cdot\overline{\phi}(f_{p_{x_i}}) = \begin{cases} R\cdot t^{r(p-1)} \\ \text{oder } = 0 \end{cases}$$

Die Bilder $\overline{\phi}(f_{p_{x_i}})$ können nicht alle verschwinden, denn sonst müßte für jedes i eine Potenz von $\overline{\phi}(X_i)$ in R verschwinden, d.h. $\overline{\phi}(X_i) = 0$ für alle i , was unserer Voraussetzung $\phi \neq 0$ widerspricht.

Es folgt : $R\cdot\overline{\phi}(\overline{\mathfrak{f}}) = R\cdot\phi(\overline{\mathfrak{f}}) = R\cdot t^{r(p-1)}$, und damit

$$R\cdot\phi(\mathfrak{f}) = R\cdot\overline{\phi}(\overline{\mathfrak{f}}) = R\cdot t^{r(p-1)} \quad .$$

Nach dem obigen Satz von Scheja haben $\mathfrak{f}$ und $\overline{\mathfrak{f}}$ also die gleiche Kodimension in P. Die Eulersche Formel besagt für f_p : $f_p = \frac{1}{p}\,(X_1 f_{p_{x_1}}+\ldots+ X_n f_{p_{x_n}})$.

Somit gilt (6.3) :

$$l(P/\mathfrak{p}) = l(P/\bar{\mathfrak{p}}) = (p-1)^n \quad , \text{ w.z.b.w.}$$

Bemerkung 6.6 : Sind $a_1,\ldots,a_n$ positive rationale Zahlen, und ist f_p der Leitterm von f bzgl. der Gewichtung $v(X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}) = a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n$, so ist der obige Satz auch dann noch richtig, falls gilt :

$$\frac{\max\{a_i\}}{\min\{a_i\}} < 2 \quad .$$

§7 Die Ganzheitsgleichung von f über $k\langle\langle f_{x_1},\ldots,f_{x_n}\rangle\rangle$

Die Funktion $f \in m(P)^2$, $P=k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$, beschreibe eine isolierte Singularität. Dann bilden die partiellen Ableitungen $f_{x_1},\ldots,f_{x_n}$ ein Parametersystem von P, und die Algebra $S = k\langle\langle f_{x_1},\ldots,f_{x_n}\rangle\rangle$ ist eine reguläre analytische k-Algebra. P ist ein endlicher freier S-Modul vom Rang $\mu(f)$, wobei $\mu(f)=\dim_k(P/(f_{x_1},\ldots,f_{x_n}))$. Wir bezeichnen mit K den Körper der Brüche von S, mit L den Körper der Brüche von P. Dann ist $[L:K] = \mu(f)$, da bekanntlich

$$L = P_{S\setminus\{0\}} = P \otimes_S K \quad .$$

Wir interressieren uns im folgenden für die minimale Ganzheitsgleichung von f über S. Zunächst eine Bemerkung :

7.1 : Das Minimalpolynom von f über K hat bereits Koeffizienten in S. Das charakteristische Polynom von f über S ist eine Potenz dieses Minimalpolynoms.

Beweis : Es sei F(Z) das Minimalpolynom von f über K und G(Z) ein beliebiges normiertes Polynom aus $S[Z]$ mit G(f)=0. Alle Nullstellen von G (in dem Zerfällungskörper von G über L) sind ebenfalls ganz über S. Da F(Z) das Polynom G(Z) teilt, sind alle Nullstellen von F und damit alle Koeffizienten von F ganz über S. Da S normal ist, folgt : $F \in S[Z]$. Der Rest ist klar.

Nach den bereits erwähnten Arbeiten von Scheja, Storch und Böger kann man nun folgern, daß die (eindeutig bestimmte) minimale Ganzheitsgleichung von f über S

bereits eine Ganzheitsgleichung von f über dem Ideal m(S) ist (siehe (14)).

Man kann nun vermuten, daß das Minimalpolynom von f über S stets mit dem charakteristischen Polynom übereinstimmt, d.h. daß gilt : $\operatorname{grad}_S f = \mu(f)$! Wir werden dies für einige Beispielklassen beweisen.

Manchmal ist es notwendig, den Grundkörper zu erweitern. Dies bereitet im allgemeinen keine Schwierigkeiten :

7.2 : Es sei $\overline{k}$ ein bewerteter Oberkörper von k, $\overline{P} = \overline{k}\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$, $\overline{S} = \overline{k}\langle\langle f_{x_1},\ldots,f_{x_n}\rangle\rangle$. Dann ist :

$$\operatorname{rang}_{\overline{S}} \overline{P} = \operatorname{rang}_S P \ , \quad \operatorname{grad}_S f = \operatorname{grad}_{\overline{S}} f \ ,$$

d.h. die Minimalpolynome von f über S und $\overline{S}$ stimmen überein.

Beweis : Es ist $S[f]$ ein freier S-Modul. Daher ist auch $\overline{S}[f] = S[f] \otimes_S \overline{S}$ ein freier $\overline{S}$-Modul des gleichen Ranges. Das gleiche gilt für den S-Modul P und den $\overline{S}$-Modul $\overline{P} = P \otimes_S \overline{S}$, w.z.b.w.

Zerfällt f in eine Summe zweier Potenzreihen, die verschiedene Unbestimmte enthalten, so läßt sich unser Problem reduzieren :

Satz 7.3 : Es sei $P_1 = k\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$, $P_2 = k\langle\langle y_1,\ldots,y_m\rangle\rangle$, $P = P_1 \hat{\otimes}_k P_2$. Außerdem seien $g \in m(P_1)$, $h \in m(P_2)$, $f = g+h \in m(P)$. Dann ist f isolierte Singularität in P genau dann, wenn g und h isolierte Singularitäten in P_1 bzw. P_2 sind.

In diesem Falle gilt :

$$\operatorname{grad}_{S} f = \operatorname{grad}_{S_1} g \cdot \operatorname{grad}_{S_2} h \quad , \text{ wobei :}$$

$$S_1 = k\langle\langle g_{x_1}, \ldots, g_{x_n} \rangle\rangle \quad , \quad S_2 = k\langle\langle h_{y_1}, \ldots, h_{y_m} \rangle\rangle \quad , \quad S = S_1 \mathbin{\hat{\otimes}_k} S_2 \quad .$$

Beweis : Die erste Aussage ist klar. Es sei also f isolierte Singularität in P. Wir bezeichnen mit K, K_{12}, L, L_{12} die Körper der Brüche von S, S_{12}, P, P_{12} und mit $\bar{L}$ die algebraische Hülle von L. Es sei

$$r = \operatorname{rang}_{S_1} P_1 = \left[L_1 : K_1\right]$$

$$s = \operatorname{rang}_{S_2} P_2 = \left[L_2 : K_2\right]$$

$$r \cdot s = \operatorname{rang}_{S} P = \left[L : K\right]$$

Nach 7.2 können wir annehmen, daß k algebraisch abgeschlossen ist. Die normalen Hüllen von L_1, L_2, L über K_1, K_2, K bezeichnen wir mit $\Omega_1, \Omega_2, \Omega$, und wir nehmen an daß diese in $\bar{L}$ eingebettet sind.

Es sei ferner : $G_1 = \{z \in \Omega_1 ;\ z \text{ ganz über } P_1\}$

$G_2 = \{z \in \Omega_2 ;\ z \text{ ganz über } P_2\}$

$G = \{z \in \Omega ;\ z \text{ ganz über } P\}$.

G, G_1, G_2 sind analytische k-Algebren.

Es seien $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_r : L_1 \longrightarrow \bar{L}$ alle K_1-Homomorphismen,

$\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_s : L_2 \longrightarrow \bar{L}$ alle K_2-Homomorphismen.

Die Beschränkungen σ_i, τ_j der $\tilde{\sigma}_i, \tilde{\tau}_j$ auf P_1 bzw. P_2 induzieren analytische Homomorphismen $\sigma_i \mathbin{\hat{\otimes}} \tau_j : P \longrightarrow G$, die alle S festlassen. Die r·s paarweise verschiedenen $\sigma_i \mathbin{\hat{\otimes}} \tau_j$ lassen sich fortsetzen zu K-Homomorphismen auf L, die wir mit φ_{ij} bezeichnen wollen.

Es ist $\operatorname{grad}_{S_1} g = \operatorname{card}\{\sigma_1(g),\ldots,\sigma_r(g)\} = r'$

$\operatorname{grad}_{S_2} h = \operatorname{card}\{\tau_1(h),\ldots,\tau_s(h)\} = s'$

Behauptung : $\operatorname{card}\{\sigma_i(g) + \tau_j(h);\ \text{alle } i,j\} = r's'$

Beweis : Wir nehmen an, daß

$$\sigma_i(g) + \tau_j(h) = \sigma_k(g) + \tau_l(h) \quad .$$

Dann ist $z = \sigma_i(g) - \sigma_k(g) = \tau_l(h) - \tau_j(h)$ enthalten in $m(G_1) \cap m(G_2) \subseteq m(G)$. Sei $F_1(Z)$ das Minimalpolynom von z über L_1 , $F(Z)$ das Minimalpolynom von z über L. Da P_1 und P normal sind, haben F_1 und F Koeffizienten in P_1 und P. Da weiterhin P_1 ganz-abgeschlossen in P liegt, schließt man : $F_1 = F$.

Entsprechend zeigt man für das Minimalpolynom F_2 von z über L_2 : $F_2 = F$. Also hat das Polynom $F = F_1 = F_2$ Koeffizienten in $P_1 \cap P_2 = k$, d.h. z ist algebraisch über k. Dies ist aber wegen $z \in m(G)$ nur möglich, wenn $z = 0$, w.z.b.w.

Da für die K-Homomorphismen φ_{ij} von L gilt :

$$\varphi_{ij}(f) = \sigma_i(g) + \tau_j(h) \quad ,$$

folgt 7.3 aus der obigen Behauptung. Damit ist 7.3 bewiesen.

Wie verhält sich das Minimalpolynom von f über S (und insbesondere $\operatorname{grad}_S f$) bei Koordinaten-Transformationen ? Dies ist nur für lineare Transformationen

leicht zu berechnen :

Satz 7.4 : Es sei $f \in m(P)^2$ isolierte Singularität , S wie obendefiniert, und $g = \sigma(f)$,wobei σ ein linearer Automorphismus von P ist, der definiert ist durch :

$$\begin{pmatrix} \sigma(x_1) \\ \vdots \\ \sigma(x_n) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = (a_{ij}) \ ,$$

, A=n×n-Matrix über k.

Dann gilt :

1.) $k\langle\langle g_{x_1}, \ldots, g_{x_n} \rangle\rangle = \sigma(S)$, genauer :

$$\begin{pmatrix} g_{x_1} \\ \vdots \\ g_{x_n} \end{pmatrix} = A^t \cdot \begin{pmatrix} \sigma(f_{x_1}) \\ \vdots \\ \sigma(f_{x_n}) \end{pmatrix}$$

2.) Ist $f^r + s_1 f^{r-1} + \ldots + s_r = 0$ die minimale Ganzheitsgleichung von f über S, so ist

$$g^r + \sigma(s_1) g^{r-1} + \ldots + \sigma(s_r) = 0$$

die minimale Ganzheitsgleichung von g über $k\langle\langle g_{x_1}, \ldots, g_{x_n} \rangle\rangle$.

Beweis : Nach der Kettenregel ist

$$g_{x_v} = f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))_{x_v} = \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i)_{x_v} \cdot \sigma(f_{x_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{iv} \cdot \sigma(f_{x_i}) \ .$$

Daraus folgen 1.) und 2.).

Folgerung 7.5 : Zusätzlich zu den obigen Voraussetzungen sei $g = f$, d.h. σ lasse f fix. Dann lassen σ, σ^{-1} die s_i fix, und σ^{-1} induziert einen k-Automorphismus

von S mit : $\begin{pmatrix} \sigma^{-1}(f_{x_1}) \\ \\ \sigma^{-1}(f_{x_n}) \end{pmatrix} = A^t \cdot \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$

Beweis : Folgt aus 7.4 .

Beispiele :

1.) $f = X^2 + 4Y^2$, $f - \frac{1}{4} f_x^2 - \frac{1}{16} f_y^2 = f - s_0 = 0$

f ist fix unter $\begin{cases} X \longrightarrow 2Y \\ Y \longrightarrow \frac{1}{2}X \end{cases}$

s_0 ist fix unter $\begin{cases} f_x \longrightarrow \frac{1}{2} f_x \\ f_y \longrightarrow 2 f_y \end{cases}$

2.) $f \in k\langle\langle X_1^{r_1}, \ldots, X_n^{r_n} \rangle\rangle \Longrightarrow$ alle $s_i \in k\langle\langle f_{x_1}^{r_1}, \ldots, f_{x_n}^{r_n} \rangle\rangle$,

3.) f symmetrisch in den $X_i \Rightarrow$ alle s_i symmetrisch in den f_{X_i},

4.) $f = X_1^{a_1} + \ldots\ldots + X_n^{a_n}$, alle $a_i \geq 2$.

Für Singularitäten dieser Form gilt :

$$\operatorname{grad}_S f = \mu(f) = (a_1 - 1) \ldots\ldots (a_n - 1) .$$

Für die Koeffizienten $s_1, \ldots, s$ des Minimalpolynoms gilt :

a) $s_i \in m(S)^i$;

b) $s_i \in k\langle\langle f_{x_1}^{\alpha_1}, \ldots\ldots, f_{x_n}^{\alpha_n} \rangle\rangle$;

c) $s_i \neq 0 \Longrightarrow$ i liegt in der von den $(a_i - 1)$ erzeugten Halbgruppe .

Beweis : Zu 2.): Man betrachte die Automorphismen

$X_i \longrightarrow w X_i$, w=prim. r_i-te Einheitswurzel !

Zu 3.) : Man betrachte alle Permutationen der X_i !

Zu 4.) : Eine einfache Gradbetrachtung liefert :

$$\operatorname{grad}_{S_i} x_i^{a_i} = a_i - 1 \text{ , wobei } S_i = k\langle\langle x_i^{a_i-1} \rangle\rangle \text{ .}$$

Die erste Aussege folgt dann aus 7.3.

Wir können annehmen,(daß k algebraisch abgeschlossen ist. Es gibt μ verschiedene S-Automorphismen $\sigma_1,\ldots,\sigma_\mu$ von P, die alle die Gestalt

$$x_i \longrightarrow w_i^{v_i} \cdot x_i \text{ , } 0 \leq v_i \leq a_i - 2 \text{ , } w_i \text{ sei primitive } (a_i-1)\text{-te Einheitswurzel.}$$

Das Minimalpolynom F(Z) läßt sich folgendermaßen berechnen :

$$F(Z) = \prod_{i=1,\ldots,\mu} (Z - \sigma_i(f))$$

$$= \prod_{\substack{v_1=0,\ldots,a_1-2 \\ \vdots \\ v_n=0,\ldots,a_n-2}} (Z - (w_1^{v_1} x_1^{a_1} + \ldots\ldots + w_n^{v_n} x_n^{a_n}))$$

Aus dieser Darstellung folgen nun a ,b und c .

Spezialfälle zu 4.) :

5.) $f = x^2 + y^b$, $b \geq 2$, $\Longrightarrow F = (Z-x^2)^{b-1} - y^{b(b-1)}$

6.) $f = x^3 + y^b$, $b \geq 3$, $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow F = (Z^2-x^6)^{b-1} - y^{b(b-1)} \cdot \left[(Z+x^3)^{b-1} + (Z-x^3)^{b-1}\right] + y^{2b(b-1)}$$

Wir zeigen nun :

Satz 7.6 : Es sei $f \in m(P)^2$ eine isolierte Singularität. P,S,K,L seien wie zu Beginn dieses Paragraphen definiert. Ist L eine Galois-Erweiterung von K, so gilt :

$$\operatorname{grad}_S f = \mu(f) = \operatorname{rang}_S P \text{ .}$$

Beweis : Sei $\mu = \operatorname{rang}_S P$ die Milnor-Zahl von f. Nach Voraussetzung gibt es μ paarweise verschiedene K-Automorphismen $\tilde{\sigma}_1,\ldots,\tilde{\sigma}_\mu$ von L. Wir müssen zeigen, daß von diesen $\tilde{\sigma}_i$ nur die Identität die Funktion f fix läßt. Sei also $\tilde{\sigma} : L \to L$ ein K-Automorphismus von L mit : $\tilde{\sigma}(f) = f$. Die Beschränkung $\sigma = \tilde{\sigma} | P$ liefert einen S-Automorphismus von P, da P normal ist. Die Kettenregel liefert für alle $\nu=1,\ldots,n$:

$$f_{x_\nu} = f(\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_n))_{x_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sigma(x_i)_{x_\nu} \cdot \sigma(f_{x_i})$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \sigma(x_i)_{x_\nu} \cdot f_{x_i} \quad ,$$

d.h. es gilt : $$\sum_{\lambda=1}^{n} (\sigma(x_i)_{x_\nu} - \delta_{i\nu}) \cdot f_{x_i} = 0 \ .$$

Da die f_{x_i} eine Primfolge in m(P) bilden, wird der Modul der Relationen der f_{x_i} erzeugt von den regulären Syzygien

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_{x_j} \\ \vdots \\ -f_{x_i} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{i-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \text{j-te Zeile} \\ \\ \end{matrix} .$$

Insbesondere ist $R \subseteq (Pf_{x_1} + \ldots + Pf_{x_n}) \cdot P^n \subseteq m(P) \cdot P^n$, da $f \in m(P)^2$. Also folgt :

$$\sigma(x_i)_{x_\nu} \equiv \delta_{i\nu} \quad \text{modulo } m(P) \ .$$

Dies bedeutet, daß $\sigma(x_i) \equiv x_i$ modulo $m(P)^2$, d.h. induziert auf $m(P)/m(P)^2$ die Identität. Die Behauptung

folgt nun aus folgendem

Hilfssatz : Es sei σ ein k-Automorphismus von $P = k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ mit endlicher Ordnung, der auf $m(P)/m(P)^2$ die Identität induziert. Dann ist (falls char k = 0) σ bereits die Identität.

Beweis des Hilfssatzes : Angenommen, es ist (O.B.d.A.) $\sigma(X_1) \neq X_1$. Wir zerlegen $\sigma(X_1)$ in homogene Bestandteile :

$$\sigma(X_1) = X_1 + \sum_{i\geq 2} p_i \quad , \; p_i \text{ homogen vom Grad } i.$$

Sei r der kleinste Index $i \geq 2$ mit $p_i \neq 0$:

$$\sigma(X_1) = X_1 + p_r + \sum_{i>r} p_i \quad .$$

Durch Induktion erhält man :

$$\sigma(X_1) = X_1 + kp_r + (\text{Terme mit Grad} > r) \neq X_1 \; !$$

Dies widerspricht der Voraussetzung, daß σ endliche Ordnung besitzt ! Damit ist der Hilfssatz und somit auch 7.6 bewiesen.

Bemerkung : Der obige Hilfssatz ist offensichtlich für beliebige analytische k-Algebren richtig, wenn nur char k = 0 !)

Die Körpererweiterung L:K ist im allgemeinen keine Galois-Erweiterung, auch wenn k algebraisch abgeschlossen ist :

Beispiel 7.) $f = X^2 + XY^2 + Y^4$

Es ist $\mu = [L:K] = 3$. Ist $\sigma : P \to \Omega$ ein S-Homomorphismus, so gilt für die Bilder $U = \sigma(X)$, $V = \sigma(Y)$:

$$V^3 + \frac{1}{3}\cdot f_x \cdot V - \frac{1}{3}\cdot f_y = 0 \quad .$$

Das Polynom $F(Z) = Z^3 + \frac{1}{3} f_x Z - \frac{1}{3} f_y$ hat aus Gradgründen keine Nullstelle in S und ist daher irreduzibel über K. Also ist $L = K[Y]$, und es gilt :

$$F(Z) = (Z-Y)\cdot(Z^2 + YZ + \frac{4}{3} Y^2 + \frac{2}{3} X) \quad .$$

Das Polynom $Z^2 + YZ + \frac{4}{3}\cdot Y^2 + \frac{2}{3}\cdot X$ hat keine Nullstelle in P, d.h. die normale Hülle von L über K ist echt größer als L !

Die Eigenschaft "L:K Galoissch" ist nicht invariant unter Koordinaten-Transformationen :

Beispiel 8.) : Für $f = X^2 + Y^4$ ist L:K eine Galois-Erweiterung vom Rang 3.

Für $g = f(X+Y^2,Y) = (X+Y^2)^2 + Y^4$ gilt :

$$Y^3 + \frac{1}{2}\cdot g_X \cdot Y - \frac{1}{4}\cdot g_Y = 0 \quad .$$

Wie im obigen Beispiel zeigt man, daß $L=K[Y]$ und die Konjugierten von Y nicht in P und damit nicht in L liegen !

§8 Diagonalisierbare Derivationen

Es sei A eine analytische k-Algebra und $\delta: A \longrightarrow A$ eine k-Derivation. Für jedes $\alpha \in k$ betrachten wir den k-Vektorraum

$$W_\alpha = \{x \in A;\ \delta(x) = \alpha x\} \quad ,$$

d.h. W_α ist (falls $W_\alpha \neq 0$) der Eigenraum von δ zum Eigenwert α . Es gilt für $\alpha, \beta \in k$:

1.) $\alpha \neq \beta \Longrightarrow W_\alpha \cap W_\beta = 0$

2.) $W_\alpha \cdot W_\beta \subseteq W_{\alpha+\beta}$

Für manche Derivationen liefern die W_α eine Art "Graduierung" von A (siehe (18)) :

8.1 : Äquivalent sind :

(1) m(A) wird von Eigenvektoren von δ erzeugt ;

(2) jedes $x \in A$ läßt sich als (m-adisch) konvergente Summe $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ von Eigenvektoren x_i von δ darstellen ;

(3) $\delta(m(A)) \subseteq m(A)$, und $\sum_{\alpha \in k} W_\alpha$ liegt dicht in A.

Beweis : Die Implikationen (1)$\Rightarrow$(2) und (2)$\Rightarrow$(3) sind klar. Es gelte nun (3). Es sei

$\mathfrak{M}$ = das von allen Eigenvektoren $x \in m(A)$ erzeugte Ideal, d.h. $\mathfrak{M} = \sum_{\alpha \in K} A \cdot (W_\alpha \cap m(A))$. Sei $x \in m(A)$ vorgegeben. Für jedes r gibt es Eigenvektoren $x_i \in \mathfrak{M}$, $y_j \notin m(A)$ mit :

$$x - \sum_{i=1}^{u} x_i - \sum_{j=1}^{w} y_j \in m(A)^r \quad .$$

Die Zerlegungen $y_j = a_j + m_j$, $a_j \in k$, $m_j \in m(A)$, $a_j \neq 0$, liefern wegen $\delta(m(A)) \subseteq m(A)$ und $\delta(a_j) = 0$:

$y_j \in W_0$ und damit $m_j \in W_0$.

Da $x \in m(A)$, folgt $\sum_{j=1}^{w} a_j = 0$ und somit $x \in \mathfrak{M} + m(A)^r$.

Da dies für alle r gilt, folgt (1), w.z.b.w.

Bemerkung : Die Bedingung $\delta(m(A)) \subseteq m(A)$ in (3) ist notwendig : $A = k\langle\langle X \rangle\rangle$, $\delta = \frac{\partial}{\partial X}$

Für jedes r gibt es Konstanten a_i mit :

$$f - \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \exp(iX) \in m(A)^r \quad !$$

Definition 8.2 : Eine k-Derivation $\delta: A \to A$ einer analytischen k-Algebra A, die die Bedingungen in 8.1 erfüllt, heißt "diagonalisierbar".

Ist δ diagonalisierbar und $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ eine konvergente Summe von Eigenvektoren, so sei

$$\pi_\alpha(x) = \sum_{x_i \in \mathfrak{W}_\alpha} x_i$$ die "Projektion" von x

auf den Eigenraum $\mathfrak{W}_\alpha$. Die Reihe $\sum_{\alpha \in k} \pi_\alpha(x)$ konvergiert dann gegen x in dem Sinne, daß es zu jedem r eine endliche Menge $E \subseteq k$ gibt, so daß für jede endliche Menge $F \subseteq k$, $F \supseteq E$ gilt :

$$x - \sum_{\alpha \in F} \pi_\alpha(x) \in m(A)^r \quad .$$

Die Elemente $\pi_\alpha(x)$ hängen nicht von der Darstellung $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ ab. Wir nennen die $\pi_\alpha(x)$ die "homogenen Komponenten" von x. Ideale $\mathfrak{a} \subset A$ heißen "homogen", falls sie von Eigenvektoren erzeugt werden. Wir notieren einige Eigenschaften :

(1) $\mathfrak{a}$ ist genau dann homogen, wenn $\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$;

(2) $\mathfrak{a}$ ist genau dann homogen, wenn für alle $x \in \mathfrak{a}$ alle homogenen Komponenten in $\mathfrak{a}$ liegen ;

(3) Durchschnitte, Summen, Produkte, Radikale und Quotienten homogener Ideale sind homogen.

Ist A nullteilerfrei, so ist $M = \{\alpha \in k;\ \mathfrak{W}_\alpha \neq 0\}$ = Menge aller Eigenwerte ein Monoid, der in k_+ liegt. Für diagonalisierbare Derivationen ist M endlich erzeugt.

8.3 : Es sei $\delta : A \to A$ eine k- Derivation der analytischen k-Algebra A (nicht notwendigerweise diagonalisierbar). Dann ist $\mathfrak{W}_0 = \operatorname{Kern}\delta = 0$ genau dann, wenn für jedes $\alpha \in k$ der Eigenraum $\mathfrak{W}_\alpha$ endlich-dimensional ist.

Beweis : Sei zunächst $f \in \mathfrak{W}_0$, $f \notin k$. O.B.d.A. sei $f \in m(A)$. Dann sind alle Potenzen $f^i \in \mathfrak{W}_0$, und die f^i sind k-linear unabhängig.

Sei nun $\mathfrak{W}_\alpha$ unendlich-dimensional. Es sei

$$m(A) = Ax_1 + \ldots + Ax_n \ , \ x_i \in \mathfrak{W}_{\alpha_i} \ , \ x_i \neq 0 \ .$$

Dann ist

$$\mathfrak{W}_\alpha = \sum_{\nu_1\alpha_1 + \ldots + \alpha_n\nu_n = \alpha} k \cdot x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\nu_n} \ .$$

Da nach Voraussetzung $\mathfrak{W}_\alpha$ unendlich-dimensional ist, ist die Menge

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0^n ; \quad \sum_{i=1}^{n} \nu_i \alpha_i = \alpha \right\} \quad \text{unendlich.}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n \ ; \ \sum_{i=1}^{n} \nu_i \alpha_i = 0 \right\} \quad \text{ist eine additive}$$

Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$. Wäre $G \cap \mathbb{N}_0^n = 0$, so hätte für jedes $\mu \in \mathbb{N}_0^n$ die Menge $(\mu + G) \cap \mathbb{N}_0^n$ endlich viele Elemente. Für ein beliebiges $\mu \in I$ ist aber $I = (\mu + G) \cap \mathbb{N}_0^n$ unendlich. Also gibt es $\nu_1, \ldots, \nu_n \geqslant 0$, nicht alle gleich 0, mit $\nu_1\alpha_1 + \ldots + \nu_n\alpha_n = 0$, d.h.

$$x_1^{\nu_1} + \ldots + x_n^{\nu_n} \in \mathfrak{W}_0 \ , \text{w.z.b.w.}$$

Ist A eine nullteilerfreie analytische k-Algebra

und δ eine k-Derivation von A in sich, so läßt sich δ nach einem Satz von Seidenberg (siehe (20)) auf die Normalisierung A' fortsetzen. Weiter gilt

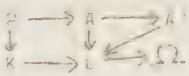
Satz 8.4 : A sei nullteilerfreie analytische k-Algebra und $\delta: A \to A$ eine diagonalisierbare k-Derivation von A. Für den Monoid M der Eigenwerte von δ gebe es einen injektiven additiven Homomorphismus $\varphi: M \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Dann läßt sich δ fortsetzen zu einer diagonalisierbaren Derivation $\bar{\delta}$ auf der Normalisierung A' . Für den Monoid $\bar{M}$ der Eigenwerte von $\bar{\delta}$ gilt :

$$\bar{M} \subseteq M_{\mathbb{N}} = \left\{\frac{a}{n};\ a \in M\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\} \quad .$$

Gilt $W_0 = k$, d.h. verschwindet δ nur auf k, so ist

$$\bar{W}_0 = \left\{z \in A';\ \bar{\delta}(z)=0\right\} = \left\{z \in A';\ z \text{ algebr. über } k\right\}$$

Beweis : Es sei $x_1,\ldots,x_n$ ein Erzeugendensystem von m(A) mit $\delta(x_i) = a_i x_i$. Dann ist $M = \mathbb{N}_0 a_1 + \ldots + \mathbb{N}_0 a_n$. Es sei r=dimA und O.B.d.A. $x_1,\ldots,x_r$ ein Parametersystem von A. Für $P = k\langle\langle x_1,\ldots,x_r\rangle\rangle$ gilt : $\delta(P) \subseteq P$. Wir bezeichnen mit K und L die Körper der Brüche von P und A, und mit Ω die normale Hülle von L über K. Wir haben also folgende Inklusionen :



Die Derivation δ läßt sich eindeutig fortsetzen auf L und damit auch auf Ω . Wir wollen diese Erweiterung $\tilde{\delta}$ nennen . Es seien $t=\text{rang}_K L$ und $\sigma_1,\ldots,\sigma_t: L \to \Omega$ alle K-Homomorphismen von L in Ω . Jedes σ_i sei

(beliebig) fortgesetzt zu einem K-Automorphismus $\tilde{\sigma}_i$ von Ω. Wir zeigen : $\tilde{\delta}\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_i\tilde{\delta}$.

Die Abbildung $\tilde{\sigma}_i\tilde{\delta}\tilde{\sigma}_i^{-1}$ ist, wie man leicht nachrechnet, eine k-Derivation von Ω, die auf K mit $\tilde{\delta}$ übereinstimmt. Da die Erweiterung von $\tilde{\delta}|K$ auf die separable algebraische Erweiterung Ω eindeutig bestimmt ist, folgt : $\tilde{\sigma}_i \circ \tilde{\delta} \circ \tilde{\sigma}_i^{-1} = \tilde{\delta}$,w.z.z.w.

Insbesondere folgt hieraus, daß die Bilder $\sigma_i(x_j)$ Eigenvektoren von $\tilde{\delta}$ zum Eigenwert a_j sind.

Sei $y_1,\ldots,y_t$ eine K-Basis von L, wobei alle y_i Monome in den x_j sind. Es gelte : $\tilde{\delta}(y_i) = \beta_i y_i$, $\beta_i \in k$.

Die Elemente $\mathrm{Spur}_K^L(y_i y_j) = \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\sigma}_\nu(y_i y_j)$ sind homogen zu den Eigenwerten $\beta_i+\beta_j$, und da

$$\Delta = \mathrm{diskr}(y_1,\ldots,y_t) = \det(\mathrm{Spur}_K^L(y_i y_j)) \neq 0,$$

ist Δ homogen zum Eigenwert $2\cdot(\beta_1+\ldots+\beta_t)$.

Bekanntlich gilt : $A' \subseteq A\cdot\frac{1}{\Delta}$.

Sei nun $z = f\cdot\frac{1}{\Delta} \in A'$, $f \in A$. Wir zerlegen f folgendermaßen :

$$f = \sum_{\alpha\in M} \pi_\alpha(f) = \sum_{i\geq 0} f_i \text{ , wobei } \pi_\alpha(f) = f_{\varphi(\alpha)} .$$

Es sei $p = \min\{i;\ f_i \neq 0\}$, $p \in \mathbb{R}$. Da die Menge $\varphi(M)$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$ besitzt, existiert für $z\neq 0$ diese Zahl p.

Wir zeigen : $\frac{f_p}{\Delta} \in A'$.

Für alle i gilt : $z^i \in A'$,d.h. :

$$z^i = \frac{1}{\Delta^i}(f_p^i + \ldots) = \frac{1}{\Delta^i}\cdot\sum_{q\geq 0} g_q = \frac{1}{\Delta^i}\sum_{q\geq 0} \Delta^{i-1}\cdot g_q \text{ , alle } g_q \in A.$$

Hierbei sei g_q homogen zu dem $\alpha\in M$ mit $\varphi(\alpha) = q$.

Ein Vergleich der Komponenten liefert :

$$\left(\frac{f_p}{\Delta}\right)^i = g_q \cdot \frac{1}{\Delta} \in A\,\frac{1}{\Delta} \qquad \text{(für alle } i \text{!)} .$$

Also liegt $A\left[\frac{f_p}{\Delta}\right]$ in dem endlichen A-Modul $A\cdot\frac{1}{\Delta}$ und ist somit ganz über A, d.h. : $\frac{f_p}{\Delta} \in A'$.

Damit ist auch $z - \frac{f_p}{\Delta} = \sum_{\nu>p} \frac{f_\nu}{\Delta} \in A'$, und man zeigt durch Induktion :

$$\frac{f_\nu}{\Delta} \in A' \quad \text{für alle } \nu .$$

Erzeugt nun eine endliche Menge von Elementen $\frac{1}{\Delta}\sum_{q\geq 0} f_q^{(\nu)}$ das Ideal $m(A')$, so liegen alle homogenen Komponenten $\frac{1}{\Delta}\cdot f_q^{(\nu)}$ in $m(A')$, und diese erzeugen $m(A')$.

Ist $z = \frac{1}{\Delta}\sum_{q\geq 0} f_q$, so gilt : $\tilde{\delta}(z) = \alpha\cdot\frac{1}{\Delta}\cdot\sum_{q\geq 0}\beta_q f_q$,

wobei $\alpha, \beta_q \in k$. Da der A-Modul A' abgeschlossener Untermodul des endlichen A-Moduls $A\cdot\frac{1}{\Delta}$ ist, folgt :

$\tilde{\delta}(z) \in A'$, d.h. es ist $\tilde{\delta}(A') \subseteq A'$. Es sei $\overline{\delta} = \tilde{\delta}\,|\,A'$.

Sei nun $z \in A'$, $\tilde{\delta}(z) = \alpha\cdot z$, $z \notin A$. Es gibt eine Ganzheitsgleichung von z über P :

$$z^r + p_1 z^{r-1} + \ldots + p_r = 0 \ , \ p_i \in P \ , \ r > 1.$$

Der Grad r sei minimal gewählt. Anwendung von $\overline{\delta}$ liefert:

$$\alpha r z^r + \sum_{i=1}^{r} \left[\delta(p_i) + (r-i)\alpha\, p_i\right]\cdot z^{r-i} = 0 .$$

Da P normal ist, hat das Minimalpolynom von z über K bereits Koeffizienten in P. Ist nun $\alpha \neq 0$, so muß deswegen gelten : $\delta(p_i) + (r-i)p_i = \alpha r p_i$ und daher

$$\delta(p_i) = i\cdot\alpha\cdot p_i \quad .$$

Wegen $z \neq 0$ ist aber $p_r \neq 0$ und somit : $\alpha \in \frac{1}{r}\cdot M$.

Ist $\alpha = 0$, so muß für alle p_i gelten $\delta(p_i) = 0$.

Wird also zusätzlich $W_0 = k$ vorausgesetzt, so folgt :

$p_i \in k$,d.h. z ist algebraisch über k. Damit ist 8.4 bewiesen.

Bemerkung : Die Existenz eines injektiven Homomorphismus $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ist genau dann gesichert, wenn 0 der einzige Eigenwert $\alpha \in M$ ist mit $-\alpha \in M$! Dann ist die im Beweis benötigte Existenz von geeigneten "Leittermen" gesichert.

§9 Quasihomogene isolierte Singularitäten

Für eine Potenzreihe $f \in m(P)^2$, $P=k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$, gilt die Gleichung $f = a_1X_1f_{X_1}+\ldots+a_nX_nf_{X_n}$ genau dann, wenn f nur Monome $X_1^{v_1}\ldots X_n^{v_n}$ mit $v_1a_1+\ldots+v_na_n = 1$ enthält. Wir definieren :

Definition 9.1 : Ein Polynom $f \in k[X_1,\ldots,X_n]$ heißt "quasihomogen", falls es positive rationale Zahlen $r_1,\ldots,r_n$ gibt mit :

$$f = r_1X_1f_{X_1}+\ldots+r_nX_nf_{X_n} \quad .$$

Quasihomogene isolierte Singularitäten sind in Arbeiten von Brieskorn, Reiffen, Milnor und anderen untersucht worden. Viele Potenzreihen sind in geeigneten Koordinaten quasihomogene Polynome. Von Saito und Scheja, Wiebe ist folgender Satz bewiesen worden :

Satz 9.2 (siehe (11),(18))
Ist $f \in m(P)^2$, $P=k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$, eine isolierte Singularität, und gibt es Funktionen $g_1,\ldots,g_n \in P$ mit

$$f = g_1f_{X_1}+\ldots+g_nf_{X_n} \quad ,$$

so gibt es ein Koordinatensystem von P, in dem f ein quasihomogenes Polynom ist.

Nach den schon erwähnten Sätzen von Briekorn und Sebastiani wird im Falle $k=\mathbb{C}$ eine isolierte Singularität genau dann von ihren partiellen Ableitungen erzeugt, wenn der Poincare-Komplex von P/Pf exakt ist.

Inwiefern sind nun die Zahlen $r_1,\ldots,r_n$ bzw. die Koeffizienten $g_1,\ldots,g_n$ eindeutig bestimmt ? Klar

ist dies zunächst für Funktionen $f \in m(P)^3$:

9.3 : Ist $f \in m(P)^3$ eine isolierte Singularität, die von ihren partiellen Ableitungen erzeugt wird, so hängt für eine Darstellung

$$f = g_1 \cdot f_{x_1} + \ldots + g_n \cdot f_{x_n}$$

die Ähnlichkeitsklasse der Funktionalmatrix $\left(g_{i x_j}(0) \right)$ nicht von den speziell gewählten g_i , nicht von den Koordinaten und nicht von dem Erzeugenden des Ideals Pf ab. Die Eigenwerte dieser Matrix sind positive rationale Zahlen r_i mit $0 < r_i < \frac{1}{2}$. Ist f in geeigneten Koordinaten ein quasihomogenes Polynom mit den Gewichten $s_1, \ldots, s_n$, so stimmen bis auf die Reihenfolge die s_i und die r_i überein.

Beweis : Sind $f = \sum_{\lambda=1}^{\mu} g_i f_{x_i} = \sum_{\lambda=1}^{\mu} h_i f_{x_i}$ zwei Darstellungen, so werden (da die f_{x_i} eine Primfolge bilden) die Differenzen $g_i - h_i$ von den f_{x_j} erzeugt. Wegen $f \in m(P)^3$ besitzen die g_i und die h_i also die gleiche Funktionalmatrix. Die Invarianz der Ähnlichkeitsklasse unter Koordinatentransformationen folgt aus der Kettenregel. Ist nun $\varepsilon \in p$ eine Einheit, so gilt :

$$(\varepsilon + \sum_{\lambda=1}^{\mu} \varepsilon_{x_i} g_i) \, f = \sum_{\lambda=1}^{\mu} g_i \, (\varepsilon \cdot f)_{x_i} \; .$$

Die Invarianz der Funktionalmatrix der Koeffizienten folgt aus

9.4 : $f \in m(P)^2$ isolierte Singularität , $f = \sum_{\lambda=1}^{\mu} g_i f_{x_i}$

$\Longrightarrow$ alle $g_i \in m(P)$.

Beweis von 9.4 : Die Derivation $\partial = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ läßt das Ideal $\mathfrak{f} = Pf_{x_1} + \ldots + Pf_{x_n}$ invariant. Wir müssen für die induzierte Derivation

$$\bar{\partial} : P/\mathfrak{f} \longrightarrow P/\mathfrak{f}$$

zeigen : $\bar{\partial}(m(P/\mathfrak{f})) \subseteq m(P/\mathfrak{f})$.

Sei $z \in m(P/\mathfrak{f})$ und r der kleinste Exponent v mit $z^v = 0$. Dann kann wegen $0 = \bar{\partial}(z^r) = r \cdot z^{r-1} \bar{\partial}(z)$ das Bild $\bar{\partial}(z)$ keine Einheit in $P/\mathfrak{f}$ sein, d.h. $\bar{\partial}(z) \in m(P/\mathfrak{f})$

Nun zu den Eigenwerten r_i der Funktionalmatrix der g_i: nach 9.2 ist f in geeigneten Koordinaten ein quasihomogenes Polynom mit Gewichten s_i , die bis auf die Reihenfolge mit den r_i übereinstimmen. Die Ungleichung $0 < r_i \leq \frac{1}{2}$ folgt aus einer Hilfsüberlegung von Saito : da die f_{x_v} für jedes i ein gewisses x_i^r erzeugen, muß f ein Monom X_i^k, $k \geq 3$, oder $X_i^k \cdot Y_j$, $k \geq 2$, enthalten. Daraus folgt : $0 < r_i \leq \frac{1}{2}$, w.z.b.w.

Bemerkung : Unter den Voraussetzungen von 9.3 bilden die g_i also stets ein Koordinatensystem. 9.3 gilt nicht, wenn f quadratische Glieder enthält :

$$f = XY \Longrightarrow f = Xf_x = \frac{1}{4} \cdot Xf_x + \frac{3}{4} Yf_y = \ldots\ldots$$

Von Saito stammt folgender Satz ((11)):

9.5 : $f \in m(P)^2$ sei eine isolierte Singularität, die von ihren partiellen Ableitungen erzeugt wird. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $k \leq n$ und $r_1, \ldots, r_k$, so daß in geeigneten Koordinaten $U_1, \ldots, U_n$ gilt :

$$f = g + U_{k+1}^2 + \ldots + U_n^2 \quad , \quad g \in k\langle\langle U_1, \ldots, U_n \rangle\rangle,$$

wobei g in $k\langle\langle U_1,\ldots,U_k\rangle\rangle$ eine quasihomogene isolierte Singularität aus $m(P)^3$ mit den Gewichten $r_1,\ldots,r_n$ ist. Das Tupel $(r_1,\ldots,r_k,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$ heißt der "Typ" von f.

Wir sind in der Lage, für quasihomogene isolierte Singularitäten unter einer zusätzlichen Voraussetzung die Vermutung $\operatorname{grad}_{k\langle\langle f_{x_1},\ldots,f_{x_n}\rangle\rangle}(f) = \mu(f)$ zu beweisen. Diese Voraussetzung ist im Fall $n = 2$ stets erfüllt.

Satz 9.6 : Es sei $P = k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$, char k=0, und $f \in m(P)^3$ sei isolierte Singularität. Es sei

$$S = k\langle\langle f_{x_1},\ldots,f_{x_n}\rangle\rangle \quad , \quad \mu = \operatorname{rang}_S P \quad .$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein :

K = Körper der Brüche von S ;

L = Körper der Brüche von P ;

Ω = normale Hülle von L über K ;

G = ganz-algebraischer Abschluß von P in Ω .

Ist f quasihomogen und ist die lokale Algebra G ein Macaulay-Ring, so gilt :

$$\operatorname{grad}_S(f) = \mu(f) \quad , \text{ d.h. } K[f] = L \ .$$

Beweis : Es gibt eine k-Derivation $\partial = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \cdot \frac{\partial}{\partial X_i}$ auf P mit rationalen Zahlen a_i , $0 < a_i \leq \frac{1}{2}$, für die gilt :

$$\partial(f) = f \quad .$$

Aus dieser Gleichung folgt :

$$\partial(f_{x_i}) = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j f_{x_i x_j} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j X_j f_{x_j} \right)_{x_i} - a_i f_{x_i}$$

$$= f_{x_i} - a_i \cdot f_{x_i} = (1-a_i) \cdot f_{x_i} \quad .$$

Insbesondere ist also $\partial(S) \subseteq S$. Die Derivation ∂ läßt sich auf die Körper K,L und, da Ω separabel-algebraisch über L ist, auch auf Ω fortsetzen. Wir bezeichnen diese Erweiterung mit

$$\tilde{\partial} : \Omega \to \Omega \quad .$$

Es sei $t = \operatorname{rang}_K L$. Es gibt t K-Automorphismen $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ von Ω, so daß die Beschränkungen $\sigma_i | L$ genau die t K-Homomorphismen von L in Ω sind. Wie im Beweis von 8.4 zeigt man :

$$\tilde{\partial}\,\sigma_i = \sigma_i \tilde{\partial} \qquad \text{für } i=1,\ldots,t \quad .$$

Die k-Algebra

$$G' = P\left[\bigcup_{i=1}^{t} \sigma_i(P)\right]$$

ist eine analytische k-Algebra. (Sie ist Restklassenalgebra von $\sigma_1(P) \hat{\otimes}_k \ldots\ldots \hat{\otimes}_k \sigma_t(P)$.) Da die σ_i mit $\tilde{\partial}$ kommutieren, sind die Bilder $\sigma_i(X_j)$ Eigenvektoren von $\tilde{\partial}$:

$$\tilde{\partial}(\sigma_i(X_j)) = a_j \cdot \sigma_i(X_j) \quad .$$

G' ist endlich über P, m(G') wird von Eigenvektoren von $\tilde{\partial}$ erzeugt, und damit ist $\tilde{\partial}(G') \subseteq G'$, und $\tilde{\partial} | G'$ ist eine diagonalisierbare k-Derivation von G' mit positiven rationalen Eigenwerten. Die Normalisierung von G' ist G, und nach Satz 8.4 ist $\tilde{\partial} | G$ ebenfalls eine diagonalisierbare k-Derivation mit positiven rationalen Eigenwerten.

Um zu zeigen, daß $K[f]$ und L übereinstimmen, genügt es nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie zu zeigen, daß der einzige $K[f]$-Homomorphismus $\sigma : L \longrightarrow \Omega$ die

Inklusion ist.

Sei also O.B.d.A. $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}(f) = f$. Es ist zu zeigen:

$$\mathfrak{G}(X_i) = X_i \quad \text{für } i=1,\dots,n .$$

Wegen $f = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i f_{X_i}$ folgt

$$f = \mathfrak{G}(f) = a_1 \mathfrak{G}(X_1)\cdot f_{X_1} + \dots + a_n \mathfrak{G}(X_n)\cdot f_{X_n}$$

und damit :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \mathfrak{G}(X_i))\cdot f_{X_i} = 0 \quad .$$

Da G Macauleysch ist, bilden die f_{X_i} eine Primfolge in G, d.h. :

$$X_i - \mathfrak{G}(X_i) = \sum_{j\neq i} A_{ij}\cdot f_{X_j} \quad , \quad A_{ij} \in G .$$

Es sei für $A \in G$, $A \neq 0$, $v(A)$ der kleinste Eigenwert aller nichttrivialen homogenen Komponenten von A. Wir nehmen nun an, daß es ein i gibt mit $X_i \neq \mathfrak{G}(X_i)$. Dann existiert ein $j \neq i$ mit :

$$v(A_{ij}\cdot f_{X_j}) \leqq v(X_i - \mathfrak{G}(X_i)).$$

Es folgt :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} > a_i = v(X_i - \mathfrak{G}(X_i)) &\geqslant v(A_{ij}\cdot f_{X_j}) \\ &= v(A_{ij}) + v(f_{X_j}) \\ &\geqslant 0 + 1 - a_j \\ &> \tfrac{1}{2} \quad . \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch! Also ist $\mathfrak{G}(X_i) = X_i$ für alle i, w.z.b.w.

Bemerkung 9.7 : 1.) Gilt zusätzlich in 9.6 die Ungleichung $\max\{a_i\} < 2 \min\{a_i\}$, so gilt für jedes Koordinatensystem $U_1,\dots,U_n$ von P :

$$\operatorname{grad}_k \langle\!\langle f_{U_1},\dots,f_{U_n} \rangle\!\rangle^{(f)} = \mu \quad .$$

2.) Ist $f \in m(P)^2$ mit $f = g + X_{k+1}^2 + \ldots + X_n^2$, wobei $g \in k\langle\langle X_1,\ldots,X_k\rangle\rangle$ die Voraussetzungen von Satz 9.6 erfüllt (in $P' = k\langle\langle X_1,\ldots,X_k\rangle\rangle$), so gilt ebenfalls :

$$\operatorname{grad}_{k\langle\langle f_{x_1},\ldots,f_{x_n}\rangle\rangle}(f) = \mu(f) \quad .$$

Beweis : 2.) folgt aus 7.3 und 9.6 .

Nun zu 1.). Es gelte $a_i < 2 \cdot a_j$ für alle i,j . Jeder k-Automorphismus von P läßt sich als Komposition einer linearen Transformation und einer Transformation, die auf $m(P)/m(P)^2$ die Identität induziert, darstellen. Nach 7.4 ist $\operatorname{grad}_S f$ unter linearen Transformationen invariant. Wir können also annehmen, daß

$$U_i = X_i + m_i \quad , \; m_i \in m(P)^2 .$$

Es sei

$$f^*(U_1,\ldots,U_n) = f^*(X_1-m_1,\ldots,X_n-m_n) = f \; .$$

Bezüglich der Bewertung $v^*(U_1^{v_1},\ldots,U_n^{v_n}) = a_1v_1+\ldots+a_nv_n$ ist nun $f(U_1,\ldots,U_n)$ der Leitterm von $f^*(U_1,\ldots,U_n)$ und entsprechend $f_{x_i}(U_1,\ldots,U_n)$ der Leitterm von $f^*_{u_i}(U_1,\ldots,U_n)$, da für alle i $X_i-U_i \in m(P)^2$ und stets $a_i < 2\,a_j$ gilt.

Es sei nun eine Ganzheitsgleichung von f^* über $k\langle\langle f^*_{u_1},\ldots,f^*_{u_n}\rangle\rangle$ gegeben :

$$f^{*r} + s_1^1 \cdot f^{*r-1} + \ldots + s_r = 0 \; , \; r \leq \mu \; .$$

Es sei $t = \min\left\{v^*(f^{*r}), v^*(s_1 \cdot f^{*r-1}),\ldots,v^*(s_r)\right\}$.
Eine Betrachtung der homogenen Komponenten (bzgl. v^*) vom Grade t liefert eine Ganzheitsgleichung vom Grade $\leq r$ von $f(U_1,\ldots,U_n)$ über dem Körper der Brüche

von $k\langle\langle f_{x_1}(U_1,\ldots,U_n),\ldots,f_{x_n}(U_1,\ldots,U_n)\rangle\rangle$. Diese Ganzheitsgleichung muß aber bereits Koeffizienten in $S' = k\langle\langle f_{x_1}(U_1,\ldots,U_n),\ldots,f_{x_n}(U_1,\ldots,U_n)\rangle\rangle$ haben, da S' normal ist. Nach 9.6 muß also gelten : $r \geq \mu$, w.z.b.w.

Folgerung 9.8 : Ist $P = k\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ und $f \in m(P)^2$ eine quasihomogene isolierte Singularität, so gilt :

$$\operatorname{grad}_S(f) = \mu(f) = \operatorname{rang}_S P \quad , \text{ wobei } S = k\langle\langle f_x, f_y\rangle\rangle .$$

Beweis : Wir übernehmen die Bezeichnungen von 9.6 . Wegen dim G = 2 ist die normale k-Algebra G Macauleysch. Im Falle $f \in m(P)^3$ folgt die Behauptung aus 9.6 . Wir nehmen nun an, daß f quadratische Glieder enthält. Sei $\sigma : P \to G$ ein S-Homomorphismus mit $\sigma(f) = f$. Wie im Beweis von 9.6 folgt :

$$a(X - \sigma(X))\cdot f_x + b(Y - \sigma(Y))\cdot f_y = 0 \quad , \text{ wobei a,b}$$

positive rationale Zahlen sind. Wir nehmen an, daß $\sigma(X) \neq X$. Dann ist auch $\sigma(Y) \neq Y$. Es gibt ein $A \in G$, $A \neq 0$, mit : $\sigma(X) - X = Af_y$. Es gilt :

$$a = v(\sigma(X) - X) = v(A) + 1 - b \quad , \text{ d.h. } a+b > 1 .$$

Dies ist aber nicht möglich :

tritt XY in f auf, so ist a+b=1 ;

tritt X^2 auf, so ist $a = \frac{1}{2}$, und Y^2 kann nicht auftreten. Da aber $Y^j, j \geq 3$, oder $XY^j, j \geq 2$, auftreten muß, gilt in jedem Falle $b < \frac{1}{2}$, d.h. $a+b < 1$;

tritt Y^2 auf, so ergibt sich wie oben ein Widerspruch zu der Ungleichung $a+b > 1$. Damit ist 9.8 bewiesen.

Die Folgerung 9.8 läßt sich noch verallgemeinern.

Es genügt als Voraussetzung, daß f "fast" quasihomogen ist.

Satz 9.9 : Es sei $P = k\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ und $f \in m(P)^2$., Es gebe positive rationale Zahlen a und b, sodaß der Leitterm $\overline{f}$ von f bezüglich der Bewertung $v(X^iY^j) = ai+bj$ eine isolierte Singularität ist. Dann ist f isolierte Singularität mit $\mu(f) = \mu(\overline{f})$, und es gilt :

$$\text{grad}_S(f) = \mu(f) \quad , \text{ wobei } S = k\langle\langle f_x, f_y\rangle\rangle .$$

Beweis : Die Gleichung $\mu(f) = \mu(\overline{f})$ ist in 5.7 bewiesen worden. Nach 9.8 hat $\overline{f}$ den Grad $\mu(\overline{f})$ über $k\langle\langle \overline{f}_x, \overline{f}_y\rangle\rangle$. Wie im Beweis von 9.7.1 zeigt man, daß man aus jeder Ganzheitsgleichung von f über S vom Grade r eine Ganzheitsgleichung von $\overline{f}$ über dem Körper der Brüche von $k\langle\langle \overline{f}_x, \overline{f}_y\rangle\rangle$ vom Grade $\leqslant r$ erhält, deren Koeffizienten bereits in $k\langle\langle \overline{f}_x, \overline{f}_y\rangle\rangle$ liegen. Also muß gelten :

$$r \geqslant \mu(\overline{f}) = \mu(f) \text{ , w.z.b.w.}$$

Beispiele :

1.) $f = X^3 + XY^5 + Y^7$

Bezüglich der Bewertung $v(X^iY^j) = \frac{1}{3} i + \frac{1}{7} j$ ist $\overline{f} = X^3 + Y^7$, und es gilt :

$\overline{f} = \frac{1}{3}\cdot X\cdot \overline{f}_x + \frac{1}{7}\cdot Y\cdot \overline{f}_y$. Also gilt :

$\mu(f) = (3-1)\cdot(7-1) = 12$, $\text{grad}_S(f) = 12$.

2.) $f = X^4 + XY^5 + Y^7$

Bezüglich der Bewertung $v(X^iY^j) = \frac{5}{20} i + \frac{3}{20} j$ gilt : $\overline{f} = X^4 + XY^5$ ist isolierte Singularität. Da $\overline{f} = \frac{5}{20}\cdot X\cdot f_x + \frac{3}{20}\cdot Y\cdot f_y$, folgt :

$$\mu(f) = \mu(\overline{f}) = (\tfrac{20}{5} - 1)\cdot(\tfrac{20}{3} - 1) = 17$$

Außerdem : $\operatorname{grad}_S(f) = 17$.

3.) $f = X^p + s_1 X^{p-1} + \ldots + s_p$, $s_i \in m(p)^{i+1}$, $s_p \notin m(p)^{p+2}$

$\Longrightarrow \operatorname{grad}_S(f) = \mu(f) = p(p-1)$.

Ist f irreduzibel, so haben die Voraussetzungen von 9.9 zur Folge, daß $\overline{f}$ die Gestalt $\overline{f} = \alpha X^p + \beta Y^q$ besitzt, wobei p und q teilerfremd sind und die Koeffizienten α, β nicht verschwinden.

Beispiel 9.10 : Ist eine ebene Kurve durch die Parameterdarstellung

$$y = t^p$$
$$x = \eta(t) = a_q t^q + \ldots\ldots \quad , q > p \ ,$$

gegeben, und sind bereits die Zahlen p und q teilerfremd, so gilt für die Potenzreihe

$$f(X,Y) = \prod_{i=1}^{p} (X - \eta(w^i Y^{\frac{1}{p}})) \quad , w = \text{prim.p.te E.W.},$$

die Gleichung :

$$\operatorname{grad}_S(f) = \mu(f) = (p-1)\cdot(q-1) \quad .$$

Beweis : Die Behauptung folgt aus 5.11 und 9.9 .

Bemerkung : Im allgemeinen ist für irreduzible f aus $k\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ auch nach Koordinatentransformationen die Voraussetzung von Satz 9.9 nicht erreichbar, wie schon folgendes einfache Beispiel zeigt :

$$f = (X^2 - Y^3)^2 + a \cdot XY^5 - Y^7 \quad .$$

Es ist $\mu(f) = 16$, $\delta(f) = 8$.

Man erkennt an der Parameterdarstellung

$$y = t^4$$
$$x = t^6 + t^7 \quad ,$$

daß für alle Transformierten von f und für alle Bewertungen der Leitterm von f nie eine isolierte Singularität sein kann !

Literatur :

1.) M.ARTIN,"On the solution of analytic equations", Inventiones Math., 5 (1968), 277-291

2.) R.BERGER,R.KIEHL,E.KUNZ,H.-J.NASTOLD,"Differentialrechnung in der analytischen Geometrie",Lecture Notes in Math.,Heft 38,Springer,Heidelberg,1967

3.) E.BÖGER,"Differentielle und ganz-algebraische Abhängigkeit bei Idealen analytischer Algebren", Math.Zeitschr.121,188-189 (1971)

4.) J.DIEUDONNE,A.GROTHENDIECK,"Criters differentiels de regularite pour les localises des algebres analytiques",J.of Alg.5,305-324 (1967)

5.) E.BRIESKORN,"Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen",Manuscripta Math. 2, (1970) ,103-161

6.) H.GRAUERT,R.REMMERT,"Analytische Stellenalgebren", Springer-Verlag (1971)

7.) J.MILNOR,"Singular points of complex hypersurfaces", Annals of math. studies nr.61,Princeton University Press 1968

8.) M.NAGATA,"Local rings",Intersci.Publ.,New York 1962

9.) H.-J.REIFFEN,"Das Lemma von Poincare für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen", Math.Zeitschr.101,(1967),269-284

10.) H.-J.REIFFEN,"Kontrahierbare analytische Algebren", Math.Zeitschrift 109,253-268

11.) K.SAITO,"Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen",Invent.Math..,14 (1971) , 123-142

12.) G.SCHEJA,"Differentialmoduln lokaler analytischer Algebren",Schriftenreihe des Math.Institt. der Universität Fribourg (1969/70)

13.) G.SCHEJA,"Multiplizitätenvergleich unter Verwendung von Testkurven",Comment.Math.Helv.44 (1969), 438-445

14.) G.SCHEJA,"Über ganz-algebraische Abhängigkeit in der Idealtheorie",Comment.Helv.45 (1970),384-390

15.) G.SCHEJA,U.STORCH,"Über differentielle Abhängigkeit bei Idealen analytischer Algebren",Math.Zeitschr. 114,101-112 (1970)

16.) G.SCHEJA,U.STORCH,"Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren", Math.Ann.197,137-170 (1972)

17.) G.SCHEJA,U.STORCH,"Über Spurfunktionen bei vollständigen Durchschnitten",J.f.d.reine u. angew. Mathematik 278/279 , 174-190

18.) G.SCHEJA,H.WIEBE,"Über Derivationen von lokalen analytischen Algebren",Symposia Mathematica XI (1973),161-192

19.) M.SEBASTIANI,"Preuve d'une conjecture de Brieskorn", Manuscr.Math. 2 (1970),301-308

20.) A.SEIDENBERG,"Derivations and Integral Closure", Pacific J.of Math. 16,167-173 (1966)

21.) H.WIEBE,"Über homologische Invarianten lokaler Ringe",Math.Ann. 179 (1969),257-274

22.) O.ZARISKI,P.SAMUEL,"Commutative Algebra",Vol.2, (Van Nostrand,Princeton,1960)

Lebenslauf

Am 18.Januar 1948 wurde ich, Peter Kuhn, als Sohn des Werkmeisters Hans Kuhn und seiner Gattin Elsa, geb. Beil, in Altena/Westf. geboren. Von 1954 bis 1958 besuchte ich die Grundschule in Altena. Anschließend besuchte ich das Städtische Gymnasium in Altena, wo ich Ostern 1966 die Reifeprüfung ablegte. Vom Sommersemester 1966 an studierte ich Mathematik an der Universität Münster. Dort legte ich im Juli 1970 die Diplomprüfung in Mathematik ab.

Von 1970 bis 1980 war ich an der Ruhr-Universität Bochum beschäftigt, und zwar von 1970 bis 1973 als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle und ab 1973 als wissenschaftliche Hilfskraft. Während dieser Zeit entstand die vorliegende Dissertation unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. Günter Scheja.

SCHADEL GmbH BRD 8600 Bamberg Tel.: 0951/58461 u. 54414